L1 PCEI
Géométrie et polynômes
DS du 15 décembre 2013

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 15 minutes par exo, 20 minutes au (grand) maximum. Rédiger soigneusement vos réponses en explicitant (succintement) les propriétés et méthodes que vous utilisez.

Exercice 1 Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ le plan contenant les points $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$ et $C(3,1,2)$.

i) Donner une équation cartésienne de P.

Réponse. Un point $M(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à P ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires, ce qui se caractérise par le fait que le déterminant (ou produit mixte) des 3 vecteurs est nul. L'équation cartésienne de P est donc :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

On a $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}) \wedge (2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}) \\
&= -(\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}) - (\vec{\imath} \wedge \vec{k}) + 2(\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}) - (\vec{\jmath} \wedge \vec{k}) - 4(\vec{k} \wedge \vec{\imath}) + 2(\vec{k} \wedge \vec{\jmath}) \\
&= -\vec{k} + \vec{\jmath} - 2\vec{k} - \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 2\vec{\imath} \\
&= -3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}
\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{AM} = (x-1)\vec{\imath} + (y-2)\vec{\jmath} + (z-3)\vec{k}$ on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) &= (-3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}).((x-1)\vec{\imath} + (y-2)\vec{\jmath} + (z-3)\vec{k}) \\
&= -3(x-1) - 3(y-2) - 3(z-3) \\
&= -3x - 3y - 3z + 18 = -3(x+y+z-6)
\end{aligned}$$

On en déduit une équation cartésienne pour P : $x + y + z = 6$.

ii) Calculer les points d'intersection de P avec le plan P' dont le système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x &= 1 + 3s + 6t \\ y &= 1 + 5s + 4t \\ z &= 1 + 7s + 2t \end{cases}$$

Réponse. P et P' étant deux plans leur intersection est vide ou une droite. Il s'agit de trouver une équation (cartésienne ou paramétrique) de cette droite si elle existe. Pour cela on résoud le système d'équations :

$$\begin{cases} x = 1 + 3s + 6t \\ y = 1 + 5s + 4t \\ z = 1 + 7s + 2t \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

qui est satisfait par les coordonnées (x,y,z) de tout point M appartenant à P' et à P.
Si on ajoute les 3 premières équations on obtient $x+y+z = 3+15s+12t$; d'après la dernière équation on en déduit $3 + 15s + 12t = 6$ d'où : $12t = 3 - 15s$ et finalement $t = (1-5s)/4$. On reporte dans les 3 premières équations pour obtenir un système d'équations paramétriques de la droite $P \cap P'$:

$$\begin{cases} x = 1 + 3s + 6(1-5s)/4 = 5/2 - 9s/2 \\ y = 1 + 5s + 4(1-5s)/4 = 2 \\ z = 1 + 7s + 2(1-5s)/4 = 3/2 + 9s/2 \end{cases}$$

En ajoutant la première et la dernière pour faire disparaître le paramètre s et en gardant la seconde on obtient un système d'équations cartésiennes de la droite :

$$\begin{cases} x+z=4 \\ y=2 \end{cases}$$

iii) Calculer la distance du point $E(2,2,-4)$ au plan P.

Réponse. La distance de E à P est la norme du vecteur $\overrightarrow{EH}$ où H est le projeté orthogonal de E sur P.
Notons $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; on a déjà calculé à la première question que $\vec{n}=-3\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-3\vec{k}$. Comme A, B et C sont des points de P, $\vec{n}$ est normal à P et par conséquent $\overrightarrow{EH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{EH}=\lambda\vec{n}=-3\lambda\vec{\imath}-3\lambda\vec{\jmath}-3\lambda\vec{k}$.
Notons (x,y,z) les coordonnées de H si bien que $\overrightarrow{EH}=(x-2)\vec{\imath}+(y-2)\vec{\jmath}+(z+4)\vec{k}$. On doit donc avoir :

$$\begin{cases} x-2=-3\lambda \\ y-2=-3\lambda \\ z+4=-3\lambda \end{cases}$$

Mais d'autre part comme H est le projeté orthogonal de E sur P, ses coordonnées doivent satisfaire l'équation de P donc $x+y+z=6$.
De ces 4 équations on déduit (en ajoutant les 3 premières) que $\lambda=-2/3$ d'où finalement $H(4,4,-2)$ et $\overrightarrow{EH}=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+2\vec{k}$.
La norme de $\overrightarrow{EH}$ est alors donnée par

$$\left\|\overrightarrow{EH}\right\|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{3\times 2^2}=2\sqrt{3}$$

iv) Calculer l'angle en A du triangle EAB.

Réponse. Notons $\theta=\widehat{EAB}$. On commence par calculer le cosinus de θ ; celui-ci est donné par

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AE}\right\|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

On a $\overrightarrow{AE}=\vec{\imath}-7\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AB}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$ donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} &= 1\times 1+0\times 1+(-7)\times(-2)=15 \\ \left\|\overrightarrow{AE}\right\| &= \sqrt{1^2+0^2+7^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2} \\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\cos\theta=\frac{15}{5\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On reconnait le cos de $\pi/6$.

v) Calculer l'aire du triangle EAB.

Réponse. La méthode la plus compliquée consiste à utiliser la formule bien connue : aire du triangle = base × hauteur ; il faut pour cela calculer la hauteur du triangle par exemple en E c'est à dire trouver le projeté orthogonal de E sur la droite (AB), et faire bien attention qu'il est faux que ce projeté soit justement le point H (qui est le projeté de E sur le plan P) ; en effet il se trouve que H n'appartient pas à la droite (AB) (vérifier que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires). La droite (EH) n'est pas la hauteur du triangle et par conséquent l'aire du triangle n'est pas $1/2 \left\|\overrightarrow{AB}\right\| . \left\|\overrightarrow{EH}\right\|$.
La méthode la plus simple est de se rappeler que la norme du produit vectoriel de deux vecteurs est l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs. Par conséquent l'aire du triangle EAB est juste la moitié de la norme du vecteur $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}$, c'est à dire :

$$\text{aire}(EAB) = 1/2 \left\|\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|$$

On a $\overrightarrow{AE} = \vec{\imath} - 7\vec{k}$ et $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} &= (\vec{\imath} - 7\vec{k}) \wedge (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}) \\ &= (\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}) - 2(\vec{\imath} \wedge \vec{k}) - 7(\vec{k} \wedge \vec{\imath}) - 7(\vec{k} \wedge \vec{\jmath}) \\ &= \vec{k} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{\jmath} + 7\vec{\imath} \\ &= 7\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + \vec{k}\end{aligned}$$

L'aire du triangle est donc

$$\text{aire}(EAB) = 1/2\sqrt{7^2 + 5^2 + 1^2} = 1/2\sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2 Trouver les racines carréees de $5 + 12i \in \mathbb{C}$.

Réponse. On cherche un complexe z tel que $z^2 = 5 + 12i$; notons x et y les parties réelle et imaginaire de z, c'est à dire les réels tels que $z = x + iy$. On a alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$. D'où l'on déduit les 3 équations

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \end{cases}$$

Par conséquent (en ajoutant la première et la dernière) on a $2x^2 = 18$, soit $x^2 = 9$ et finalement $x = \pm 3$. En remplaçant dans la seconde équation on obtient $\pm 6y = 12$ soit $y = \pm 2$ d'où les deux solutions $z = \pm(3 + 2i)$.

Exercice 3 Si n est un entier naturel on note $F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

i) Calculer F_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (on rappelle que si $k > p$ alors $\binom{p}{k} = 0$).

Réponse.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{0} \binom{-k}{k} &= \binom{0}{0} = 1 \\
\sum_{k=0}^{1} \binom{1-k}{k} &= \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1 \\
\sum_{k=0}^{2} \binom{2-k}{k} &= \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2} = 1 + 1 + 0 = 2 \\
\sum_{k=0}^{3} \binom{3-k}{k} &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} + \binom{1}{2} + \binom{0}{3} = 1 + 2 + 0 + 0 = 3 \\
\sum_{k=0}^{4} \binom{4-k}{k} &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} + \binom{1}{3} + \binom{0}{4} = 1 + 3 + 1 + 0 + 0 = 5 \\
\sum_{k=0}^{5} \binom{5-k}{k} &= \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} + \binom{2}{3} + \binom{1}{4} + \binom{0}{5} = 1 + 4 + 3 + 0 + 0 + 0 = 8
\end{aligned}$$

ii) Montrer que pour tout entier naturel n on a $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$.

Réponse. On fait un calcul direct (pas besoin de raisonnement par récurrence) ; on a :

$$F_n + F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k}$$

Dans la première somme ci-dessus on fait le changement de variable $l = k+1$ ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1-l}{l-1}$$

En renommant l'indice l en k on a donc :

$$\begin{aligned}
F_n + F_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} \qquad \text{d'après la propriété bien connue : } \binom{p}{q-1} + \binom{p}{q} = \binom{p+1}{q} \\
&= \binom{n+2}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} \qquad \text{car } \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+2}{0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} \qquad \text{car pour } k = n+2 \text{ on a } \binom{n+2-k}{k} = \binom{0}{n+2} = 0 \\
&= F_{n+2}
\end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer les carrés modulo 5, c'est à dire les éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ qui s'écrivent $a^2 \mod 5$ pour un $a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire que 56942137 n'est pas un carré.

Réponse. Les éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont 0, 1, 2, 3 et 4 ; leurs carrés sont :

$$\begin{aligned}
0^2 &= 0 \equiv 0 \mod 5 \\
1^2 &= 1 \equiv 1 \mod 5 \\
2^2 &= 4 \equiv 4 \mod 5 \\
3^2 &= 9 \equiv 4 \mod 5 \\
4^2 &= 16 \equiv 1 \mod 5
\end{aligned}$$

Les carrés modulo 5 sont donc 0, 1, et 4.
Or $56942137 \equiv 7 \equiv 2 \mod 5$; ça n'est donc pas un carré modulo 5 donc pas un carré (tout nombre carré est un carré modulo n pour n'importe quel n).

Exercice 5 Soit n un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $(a_k a_{k-1} \ldots a_0)_{10}$; on rappelle que cela signifie que $0 \leq a_i \leq 9$ pour $i = 0, \ldots, k$ et que $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$.

i) Montrer que $n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \mod 9$. En déduire que n est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Réponse. On a $10 = 9+1 \equiv 1 \mod 9$; par conséquent, à cause des propriétés des congruences (compatibilité avec la multiplication) pour n'importe quel entier i on a $10^i \equiv 1^i \equiv 1 \mod 9$. Toujours grâce aux propriétés des congruences (compatibilité avec l'addition) on en déduit que $\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \mod 9$.
On sait que n est divisible par 9 ssi $n \equiv 0 \mod 9$; si $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$ alors comme $n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \mod 9$ on a que n est divisible par 9 ssi $\sum_{i=0}^{k} a_i \equiv 0 \mod 9$ c'est à dire ssi $\sum_{i=0}^{k} a_i$ est divisible par 9 (remarque : on a utilisé la transitivité de la congruence ici).

ii) Montrer que 12354321 n'est pas un carré.

Réponse. Par le critère de la somme des chiffres on voit que 12354321 est divisible par 3 mais pas par 9 ; il ne peut donc être un carré : en effet d'après le lemme de Gauss, comme 3 est premier, si 3 divise $n^2 = n \times n$ alors 3 divise n et par conséquent 9 divise n^2.

Exercice 6

i) Déterminer modules et arguments des racines complexes du polynôme : $P(X) = X^5 - 1$.

Réponse. On a $P(X) = 0$ ssi $X^5 = 1$; les racines de P sont donc les racines 5ème de l'unité : 1, $e^{2i\pi/5}$, $e^{4i\pi/5}$, $e^{6i\pi/5}$, $e^{8i\pi/5}$.

ii) Factoriser P comme produit de polynômes irréductibles complexes.

Réponse. On vient de voir toutes les racines de P qui se factorise donc comme suit :

$$P(X) = (X-1)(X-e^{2i\pi/5})(X-e^{4i\pi/5})(X-e^{6i\pi/5})(X-e^{8i\pi/5})$$

iii) Factoriser P comme produit de polynômes irréductibles réels.

Réponse. On sait que les polynômes réels irréductibles réels sont les polynômes de degré 1 ou les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. Dans la factorisation ci-dessus les polynômes $(X - e^{2ik\pi/5})$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ ne sont pas réels, il faut donc les apparier 2 par 2 pour obtenir des polynômes de degré 2 ; si on choisit judicieusement les appariement ces polynômes devraient être réels.
On remarque que $e^{2i\pi/5}$ et $e^{8i\pi/5}$ sont conjugués ; pour cette raison on choisit de calculer $(X - e^{2i\pi/5})(X - e^{8i\pi/5})$ ce qui donne :

$$(X-e^{2i\pi/5})(X-e^{8i\pi/5}) = X^2 - (e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5})X + e^{2i\pi/5}e^{8i\pi/5}$$

Du fait que $e^{8i\pi/5}$ est le conjugué de $e^{2i\pi/5}$ qui sont tous deux de module 1, on déduit $e^{2i\pi/5}.e^{8i\pi/5} = 1$ et $e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = 2\cos(2\pi/5)$. Donc :

$$(X-e^{2i\pi/5})(X-e^{8i\pi/5}) = X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1$$

qui est bien un polynôme réel dont le discriminant est $((2\cos(2\pi/5))^2 - 4 = 4(\cos(2\pi/5)^2 - 1)$; comme $-1 < \cos(2\pi/5) < 1$ ce discriminant est strictement négatif. Le polynôme n'a pas de racine réelle et est donc irréductible sur $\mathbb{R}$.
Si on calcule de même $(X - e^{4i\pi/5})(X - e^{6i\pi/5})$ on obtient :

$$(X-e^{4i\pi/5})(X-e^{6i\pi/5}) = X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1$$

dont on vérifie également qu'il est irréductible sur $\mathbb{R}$. Finalement on obtient la factorisation suivante de $P(X)$ en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$:

$$P(X) = (X-1)(X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1)$$

Exercice 7 Soit $P(X) = X^3 - 3X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

i) Calculer un p.g.c.d. de P et de son polynôme dérivé P'.

Réponse. Le dérivé de P est $P'(X) = 3X^2 - 3$. La division euclidienne de P par P' donne :

$$X^3 - 3X - 2 = (3X^2 - 3)(X/3) - 2X - 2$$

La division euclidienne de $3X^2 - 3$ par $-2X - 2$ donne :

$$3X^2 - 3 = (-2X - 2)(-3X/2 + 3/2)$$

Le reste de cette division est nul, donc un pgcd de P et P' est le reste de la première division : $-2X - 2$; si on divise celui-ci par -2 on trouve le polynôme unitaire $X + 1$ qui est également un pgcd de P et P'.

ii) Utiliser le résultat pour trouver un zéro de P.

Réponse. On vient de voir que $X + 1$ est un diviseur commun de P et P'. Autrement dit P et P' sont tous les deux des multiples de $X + 1$ c'est à dire qu'il existe des polynômes Q et R tels que : $P(X) = (X + 1)Q(X)$ et $P'(X) = (X + 1)R(X)$. On voit donc que -1 est racine commune de P et P', donc en particulier de P.

iii) Trouver tous les zéros de P.

Réponse. On peut faire la remarque que -1 étant racine commune de P et de P' c'est nécessairement une racine double de P, autrement dit $(X+1)^2$ divise P. Il ne reste plus qu'à faire la division de P par $(X+1)^2 = X^2+2X+1$ pour trouver $P(X) = (X + 1)^2(X - 2)$.
Sinon comme on sait que $X + 1$ divise P on fait la division et on obtient : $P(X) = (X + 1)(X^2 - X - 2)$. Reste à factoriser $(X^2 - X - 2)$: le discriminant est $(-1)^2 - 4 \times (-2) = 9$, les racines sont donc $(1 \pm 3)/2 = -1$ ou 2 si bien que $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ et l'on retrouve

$$P(X) = (X + 1)^2(X - 2)$$