Université d'Aix-Marseille | Licence de Mathématiques
Semestre 1 | 2012-2013

MATHEMATIQUES 02

Partiel 2 – 22 Novembre 2013

Calculette et documents non autorisés | Durée : 2 heures

EXERCICE 1

Soient $A(3;-1)$ et $B(7;-5)$ deux points du plan cartésien.
1. Donner l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Donner un vecteur directeur de cette droite, puis une équation paramétrée.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$; donner l'écriture algébrique et géométrique (avec l'exponentielle) des solutions.

EXERCICE 3

Donner l'écriture géométrique (avec l'exponentielle) des nombres complexes z suivants.
1. $z = -x - ix$, où $x \in \mathbb{R}$.
2. $z = \sin(x) - i\cos(x)$, où $x \in \mathbb{R}$.
3. $z = e^{\sin(x)e^{i(x+\pi/2)}}$, où $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4

On considère l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan complexe d'affixe $z \neq 2$ tels que

$$\frac{z}{z-2} \in \mathbf{i}\,\mathbb{R}.$$

1. (Question de cours) On note z un nombre complexe et $\bar{z}$ son conjugué. Donner les trois relations entre z, $\bar{z}$, $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
2. Le point O d'affixe $z_O = 0$ et le point A d'affixe $z_A = 1 + \mathbf{i}$ appartiennent-ils à $(\mathcal{C})$?
3. Montrer que si M d'affixe z appartient à $(\mathcal{C})$ alors M' d'affixe $\bar{z}$ appartient lui aussi à $(\mathcal{C})$: donner une interprétation géométrique de ce résultat.
4. Donner une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$ (poser $z = x + \mathbf{i}y$ avec x et y réels).
5. Soit B le point d'affixe $z_B = 1$. Donner une équation cartésienne de l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient $MB = 1$. En déduire la nature et les caractéristiques de $(\mathcal{C})$ (notez que $z \neq 2$).
6. Déterminer l'ensemble des nombres **réels** x tels que le point M d'affixe $z = x + \mathbf{i}x$ appartienne à $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 5

1. (Question de cours) Donner la formule de De Moivre.
2. On rappelle que $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
En déduire que pour tout réel θ :

$$(*) \qquad \cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$

3. Utiliser $(*)$ pour résoudre l'équation $8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $8X^4 - 8X^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$.
5. En déduire $\cos(\pi/8)$.