Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2013-2014

MATHEMATIQUES 02

Première session – 18 Décembre 2013

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) $\quad 1 + z^3 + z^6 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que z est solution si et seulement si $\overline{z}$ est solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $1 + X + X^2 = 0$ (penser à la somme d'une suite géométrique).

3. Donner l'écriture géométrique (avec l'exponentielle) de toutes les solutions de (E).

EXERCICE 2

1. Soient les nombres $7^5 - 1$ et $7^5 + 1$ écrits en base décimale. Les écrire en base 7.

2. Soit le nombre 222 écrit en base 3. Donner son écriture en base décimale.

EXERCICE 3

Soient a et b deux entiers positifs tels que $ab = 2688$ et $\text{pgcd}(a; b) = 8$. On note que $2688 = 64 \times 42$.

1. Décomposer 2688 en facteurs premiers.

2. Donner a et b sachant que $4a < b < 5a$.

3. Donner un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$.

4. En déduire l'ensemble de tous les couples (u, v) d'entiers relatifs tels que $6u + 7v = 1$.

EXERCICE 4

Soit $n > 0$ un entier.

1. Question de cours.

Soit $d > 0$ un entier. Que signifie : d est le plus grand commun diviseur de $2n + 1$ et $3n + 1$?

2. Montrer que $2n + 1$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux.

EXERCICE 5

Soit (P) le plan de l'espace euclidien contenant les points $A(1; -1; 0)$, $B(2; 1; 1)$ et $C(3; 1; -1)$.

1. Donner les coordonnées du point D tel que $(ABCD)$ soit un parallélogramme.

2. Calculer l'aire du parallélogramme $(ABCD)$.

3. Soit θ l'angle aigü et non-orienté entre les droites (AB) et (BC). Montrer que $\pi/6 < \theta < \pi/2$.

4. Donner une équation cartésienne du plan contenant le parallélogramme $(ABCD)$.

5. Donner une équation paramétrique de la droite (D) orthogonale au plan contenant $(ABCD)$ et passant par le point C.

6. Donner la distance de l'origine $O(0; 0; 0)$ au plan contenant $(ABCD)$.

EXERCICE 6

On rappelle que $a! = a \times (a-1) \times (a-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$, pour tout entier $a > 0$, et $0! = 1$.

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$.

On rappelle que tous les coefficients binomiaux C_n^k sont des entiers positifs ; où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Montrer que $(2p)!$ est un multiple de $(p!)^2$, pour tout entier positif p (exprimer C_n^k pour des valeurs appropriées de n et k).

2. En déduire que $2p(2p-1)(2p-2)\ldots(p+2)(p+1)$ est un multiple de $p!$.

3. Montrer que $n!$ divise $(p+1)(p+2)\ldots(p+n)$.