Aix-Marseille Université 2014-2015

Géométrie et arithmétique 1

PARTIEL 1 - 10 OCTOBRE 2014

Exercice 1 [Question de Cours]

1) Énoncez la définition du produit scalaire de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ puis de la norme d'un vecteur.

2) Compléter les égalités ou inégalités suivantes, où $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}$ et $\vec{v'}$ désignent des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et λ, λ', μ et μ' des réels :

a) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).(\lambda'\vec{u'} + \mu'\vec{v'}) = ?$

b) $||\lambda\vec{u}|| = ?$

c) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ?$

Exercice 2

1) Donner une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, -2)$.

2) Écrire une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à $\mathcal{D}$ et passant par le point $B(0, -1)$.

3) Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

4) Calculer la distance de B à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 3 Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit d'une droite ou d'un plan. S'il s'agit d'une droite, en donner deux points distincts, s'il s'agit d'un plan, en donner 3 points distincts non alignés.

1) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équations paramétriques $x(t) = -5t + 1$ et $y(t) = 2t + 3$

2) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x + 3y + z + 5 = 0$

3) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques $x(t) = -5t + 1,\ y(t) = 2t + 3$ et $z(t) = -t + 2$

4) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes $2x + y + 2z - 2 = 0$ et $x = 0$.

Exercice 4 Pour tout réel m, on considère le plan P_m de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne :

$$m^2x + (2m-1)y + mz = 3$$

1) Pour quelles valeurs du paramètre m le point $A(1, 1, 1)$ appartient-il à P_m ?

2) Pour quelle valeur de m le vecteur $\vec{n} = (2, -\frac{5}{2}, -1)$ est-il normal (c'est-à-dire orthogonal) à P_m ?

Exercice 5 Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ soit égal à zéro.

1) Soit I le milieu du segment $[A, B]$. Démontrer qu'un point M appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB}$$

2) En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) Faire une figure.