Université Aix-Marseille 2014-2015
Licence MI 1ère année-S1

Géométrie et polynômes I

Nombres complexes

Table des matières

1 Introduction

C'est au XVI$^{\text{ème}}$ siècle qu'apparaissent pour la première fois les nombres complexes au moment de la résolution d'une équation algébrique du second ordre : pour résoudre un problème d'aire, Cardan (1545) se retrouve à résoudre l'équation

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

qui n'a pas de solutions réelles. Pourtant les valeurs *imaginaires* (c'est ainsi qu'il les appela) $5 - \sqrt{-15}$ et $5 + \sqrt{-15}$ sont bien des solutions de cette équation. Ces valeurs "impossible " (Descartes) ou imaginaires furent longtemps l'objet de discussion. Et c'est Euler (XVIII$^{\text{ème}}$) qui en maîtrisa leur emploi et introduit la notation $i^2 = -1$. Les valeurs ci-dessus s'écrivent alors $5 \pm i\sqrt{15}$ et les nombres complexes s'écriront en général : $c = a + ib$.

2 Généralités

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. On pose :

$$\mathbb{C} = \{a + ib \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où a et b sont réels. On appelle a *la partie réelle* et b *la partie imaginaire* de z. On note $a = \mathcal{R}e(z)$ et $b = \mathcal{I}m(z)$.
Lorsque $b = 0$ alors $z = a \in \mathbb{R}$. Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Les nombres complexes qui ont leur partie réelle nulle s'appellent les *imaginaires purs*. Par commodités, les nombres complexes sont parfois appelés *complexes*.

2.1 Opération sur les complexes

On munit $\mathbb{C}$ de deux *lois* :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- une addition "+" : $z + z' = a + a' + i(b + b')$
- une multiplication "·" : $z.z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

Propriétés 2.1 *Pour tous les nombres complexes z, z', z'' on a :*

1. $z + z' = z' + z$ *(commutativité de +)*
2. $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ *(associativité de +)*
3. $0 + z = z + 0 = z$ *(0 est le neutre pour +)*
4. *si $z = a + ib$, on définit l'opposé $-z = -a - ib$, il vérifie $z + (-z) = 0$.*
5. $z \cdot z' = z' \cdot z$ *(commutativité de ·)*
6. $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$ *(associtivité de ·)*
7. $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$ *(1 est le neutre pour ·)*
8. *Si $z = a + ib \neq 0$ alors z admet un inverse : $z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ et $z \cdot z^{-1} = 1$.*
9. $0 \cdot z = 0$
10. $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$ *(distributivité de · par rapport à +)*

Ces lois font de $\mathbb{C}$ un *corps commutatif.*
On peut identifier chaque nombre complexe $z = a+ib$ avec un point du plan (a, b) et donc $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (cette interprétation est apparue dans les travaux de Gauss (1799) et d'Argand (1806). Si M est un point du plan de coordonnées (a, b), on dit que le complexe $z = a + ib$ est *l'affixe* de M.

EXERCICE 1

Montrer que cette correspondance est bien bijective, i.e. à chaque point du plan correspond un unique complexe, et réciproquement.

EXERCICE 2

Placer les points d'affixe z_1, z_2, z_3 dans un repère orthonormé du plan :

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 2 + i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\ .$$

2.2 Conjugué et module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, où a et b sont réels.
On appelle *conjugué* de z le complexe $\overline{z} = a - ib$.
On appelle *module* de z le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Remarque : si z est un réel son module correspond à sa valeur absolue.

Propriétés 2.2 *Pour tous les complexes z, z', on a toutes les propriétés suivantes.*

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
4. $|z|^2 = z.\overline{z}$
5. $z = 0$ *si et seulement si* $|z| = 0$
6. $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *et* $Im(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
7. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
8. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
9. $z, z' \in \mathbb{C}$, $z \cdot z' = 0$ *ssi* $z = 0$ *ou* $z' = 0$.
10. *Si $z \neq 0$ alors son inverse s'écrit $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$; en particulier si $|z| = 1$ alors $z^{-1} = \overline{z}$.*
11. $|z^n| = |z|^n$

Les preuves de ces propriétés sont sans aucune difficulté.

2.3 Ecriture géométrique d'un nombre complexe

Comme on l'a vu précédemment (cf. Exercice 1), à chaque nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer un point du plan $Z = (a, b)$. Notons O l'origine de ce plan. Alors on obtient que le module de z, qui vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$ est égal à la distance du point Z à l'origine, notée OZ ou $d(O, Z)$ ou encore $||\overrightarrow{OZ}||$.
On appelle *argument* d'un complexe z, noté $arg(z)$, l'angle formé par l'axe des abscisses avec le vecteur $\overrightarrow{OZ}$. Ainsi :

$$\boxed{|z| = OZ = ||\overrightarrow{OZ}||}$$

et

$$\boxed{arg(z) = (\widehat{Ox, \overrightarrow{OZ}}) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OZ}}).}$$

Théorème 2.3 *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, où a et b sont réels. Il existe un unique réel strictement positif r et un unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que*

$$\theta = arg(z), \;\; r = |z| \text{ et } z = r(cos(\theta) + isin(\theta)).$$

Preuve. On place le point dans le plan grâce à l'angle et au module. Les coordonnées cartésiennes de ce point sont données par l'intersection d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (resp. des abscisses) passant par le point avec l'axe de abscisses (resp. des ordonnées). Par la définition du cosinus et du sinus on obtient : $z = (a, b)$ avec $a = rcos(\theta)$ et $b = rsin(\theta)$. Faire une figure. □

Une conséquence directe de ce résultat (via l'exercice 1) est la suivante.

Théorème 2.4 *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même modules et même argument modulo 2π.*

On note $z = re^{ix}$ *l'écriture géométrique* d'un nombre complexe, où $x \in \mathbb{R}$, en fixant la convention suivante :

$$\boxed{e^{ix} = cos(x) + isin(x)}$$

Cette définition de l'exponentielle complexe convient pour la raison suivante : prenons deux nombres complexes $z = e^{ix}$ et $z' = e^{ix'}$ de module 1 (où $x, x' \in \mathbb{R}$). En les mutipliant on obtient :

$$zz' = e^{ix}e^{ix'} = e^{i(x+x')}$$

En effet, on a $zz' = (cos(x)+isin(x))(cos(x')+isin(x'))$. On obtient le résultat en développant, puis utilisant les formules trigonométriques classiques. Cela rappelle les formules de l'exponentielle réelle.

Remarque : L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme géométrique $z = re^{ix}$ (où r est le module de z et x son argument) s'appelle aussi *forme polaire* ou *forme exponentielle* de z. Tandis que la forme $z = a + ib$, avec a et b réels, s'appelle *forme algébrique* ou *cartésienne* de z.

Théorème 2.5 *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :*

$$\boxed{|zz'| = |z|.|z'|}$$

et

$$\boxed{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \;\; (mod.\ 2\pi).}$$

Preuve. La première égalité a déjà été vue. La seconde se déduit immédiatement de l'écriture exponentielle (la première aussi). Soit $z = re^{ix}$ et $z' = se^{iy}$ où r, s, x, y sont réels. Alors $zz' = rse^{i(x+y)}$ a pour argument $x + y$ mod. 2π. □

On définit ainsi l'exponentielle pour tout nombre complexe : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On définit *l'exponentielle de z* par : $e^z = e^a e^{ib} = e^a(cos(b) + isin(b))$ (voir l'exercice 8).

EXERCICE 3

Placer les points d'affixe z_1, z_2, z_3 dans un repère orthonormé du plan :

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} .$$

EXERCICE 4

Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i}, \qquad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}, \qquad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

EXERCICE 5

Ecrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants.

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.

2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

EXERCICE 6

Effectuer les calculs suivants.

1. $(3 + 2i)(1 - 3i)$.

2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

3. $\dfrac{3+2i}{1-3i}$.

4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

EXERCICE 7

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

EXERCICE 8

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes : $e^{e^{i\alpha}}$, et $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

2.4 Formules d'Euler et de Moivre

On a les formules suivantes :

Théorème 2.6 (Formule de Moivre (1707)) *$\forall \theta \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n.}$$

Théorème 2.7 (Formule d'Euler (1740)) *$\forall \theta \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.}$$

Ce sont des conséquences immédiates de la notation géométrique des nombres complexes et de la définition de l'exponentielle complexe. Ces formules permettent de *'linéariser'* $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$ en fonction de cos et sin. Avant de voir cette linéarisation, rappelons l'écriture du *binôme.*

Rappel (Formule du binôme) : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ est appelé coefficient binomial.

Exemple de linéarisation : $\cos^3(x) = (\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^3 = \dfrac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{2^3} = \dfrac{cos(3x)+3cos(x)}{4}$.

Linéarisation de $cos^n(x)$ et $sin^n(x)$.
Ecrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ comme somme de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$:

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k(x)(i\sin(x))^{n-k}.$$

On développe puis on identifie la partie réelle à $\cos(nx)$ et la partie imaginaire à $\sin(nx)$ (voir l'exercice suivant).

EXERCICE 9

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

3 Racines complexes

Si $P(z)$ est un polynôme complexe (i.e. à coefficients complexes), les nombres complexes z_0 vérifiant $P(z_0) = 0$ sont appelés *racines du polynôme P* ou *solutions de l'équation algébrique $P(z) = 0$*.

3.1 Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

Ici le polynôme $P(z)$ est de la forme $P(z) = z^n - a_0$, où a_0 est un complexe fixé. Alors les racines z de P vérifient $z^n = a_0$, on dit qu'elles sont *les racines $n^{\text{ème}}$ de a_0*.

Remarque : Plaçons nous dans le cadre des réels, cad cherchons les réels x qui vérifient $x^n = a_0$, où $a_0 \in \mathbb{R}$. Le nombre de solutions dépend de n et a_0.
Si $n = 2$ et $a < 0$: $x^2 = a_0 < 0$, on n' a pas de solutions.
Si $n = 2$ et $a > 0$: $x^2 = a_0 > 0$ on a deux solutions $x = \pm\sqrt{a_0}$.
Par contre si $n = 3$: $x^3 = a_0$ on aura une seule solution, la racine cubique de a_0 (qui aura le même signe que a_0).

Revenons à l'équation complexe : $z^n = a_0$. On va passer par l'écriture exponentielle. On pose $a_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ où ρ_0 est le module de a_0 et θ_0 son argument (on peut choisir $\theta_0 \in [0, 2\pi[$). On cherche s'il existe un (ou des) nombres complexes z tels que :

$$\boxed{(1) \qquad z^n = \rho_0\ e^{i\theta_0}}$$

Notons ρ le module de z et θ son argument : $z = \rho e^{i\theta}$.

Par commodités, posons $Z = a_0$, et résolvons l'équation (1).
Si $Z = 0$ alors il y a un unique solution $z = 0$. On suppose donc $Z \neq 0$. On a : $z^n = \rho^n e^{ni\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}$.

$$\text{Cela implique : } \begin{cases} (2) \qquad \rho^n = \rho_0 \\ \text{et} \\ (3) \qquad n\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme $|z| = \rho > 0$, on a :

$$\boxed{\rho = \sqrt[n]{\rho_0}}$$

De plus (3) $\Rightarrow \theta = \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$, où $k \in \mathbb{Z}$. Il y a donc une infinité de possibilités pour θ.

Donc les solutions z à l'équation (1) s'écrivent :

$$z = \sqrt[n]{\rho_0} e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Regardons maintenant à quelle condition deux solutions $z = \sqrt[n]{\rho_0} e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}$ et $z' = \sqrt[n]{\rho_0} e^{i\frac{\theta_0+2k'\pi}{n}}$ sont égales : $z = z' \Leftrightarrow \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \dfrac{\theta_0 + 2k'\pi}{n} + 2p\pi$, où $p \in \mathbb{Z}$ (les arguments sont égaux mod. 2π). On obtient : $z = z' \Leftrightarrow k = k' + np$, où $p \in \mathbb{Z}$, c'est-àa-dire

$$z = z' \text{ si et seulement si } n \text{ divise } k - k'.$$

Ainsi pour avoir toutes les racines de Z, il suffit de faire varier k entre 0 et $n - 1$.

$$\boxed{\text{L'équation } z^n = \rho_0\ e^{i\theta_0} \text{ a } n \text{ solutions}}$$

qui s'écrivent :

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho_0}\ e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}},\ 0 \leq k \leq n - 1}$$

cad

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho_0}\ e^{i\theta_0},\ \sqrt[n]{\rho_0}\ e^{i\frac{\theta_0+2\pi}{n}},\ \sqrt[n]{\rho_0}\ e^{i\frac{\theta_0+4\pi}{n}}, \cdots ,\ \sqrt[n]{\rho_0}\ e^{i\frac{\theta_0+2(n-1)\pi}{n}}}$$

Notons que pour résoudre (1) de cette manière, on DOIT passer par l'écriture exponentielle.

3.2 Racine $n^{ème}$ de l'unité

On veut résoudre l'équation $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$ (le polynôme P est le polynômet : $P(z) = z^n - 1$). Les solutions sont appelées *racines de l'unité*.

On applique le résultat précédent à $a_0 = 1 = 1.\ e^{0.i}$, d'où les n racines (solutions) :

$$\boxed{1,\ e^{i\frac{2\pi}{n}},\ e^{i\frac{4\pi}{n}}, \cdots ,\ e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}}$$

cad

$$\boxed{z_0^k,\ 0 \leq k \leq n - 1, \text{ où } z_0 = e^{i\frac{2\pi}{n}}}$$

Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

EXERCICE 11

Calculer les racines carrées de 1, i, $8-6i$, et $7+24i$ sous forme cartésienne.

Exercice 12

Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 13

Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 14

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, j, j^2$. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les solutions de $1+z+z^2 = 0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1+\epsilon^p+\epsilon^{2p}+\cdots+\epsilon^{(n-1)p}$.

3.3 Résolution des équations du second degré

Rappelons d'abord la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations du second degré à coefficients réels. On veut résoudre l'équation :

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \text{ avec } a,b,c \text{ des réels.}}$$

Posons $\Delta = b^2-4ac$ *le discriminant.* Alors trois cas se présentent :

1. $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions réelles différentes : $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. $\Delta = 0$ alors l'équation a une solution réelle double : $x = \dfrac{-b}{2a}$
3. $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solutions réelles.

Rappelons que cela vient des identités remarquables : $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$. L'équation est équivalente à $(x+\dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{(b^2-4ac)}{4a^2} = 0$. On trouve les solutions en utilisant l'identité remarquable. C'est possible dans le cas où $b^2-4ac \geq 0$.

C'est pour résoudre le troisième cas (cf . Introduction) que Cardan a introduit les nombres "imaginaires". Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation à coefficient réels, on calcule les racines $\pm\delta$ du discriminant $\Delta = b^2-4ac$: $\delta^2 = \Delta$. Alors, les solutions de l'équation sont :

$$\boxed{z = \frac{-b\pm\delta}{2a}}$$

(c'est une solution double quand le discriminant est nul).
Remarque : Si $\Delta \geq 0$, on retrouve le résultat quand on restreint les solutions aux nombres réels (car les solutions sont réelles). Par contre, si $\Delta < 0$ le nombre δ n'est pas réel mais complexe de partie réelle nulle ; en particulier $\delta = \pm i\sqrt{|\Delta|}$.
En conclusion, si $\Delta < 0$:

$$\boxed{\text{les solutions s'écrivent : } z = \frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

Pour résoudre une équation du second degré à coefficients complexes, on effectue exactement la même méthode.

EXERCICE 15

Montrer que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

EXERCICE 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.

2. $z^2 + z + 1 = 0$.

3. $ix^2 + 2x + (1 - i) = 0$.

4 Géométrie

Nous avons vu (cf. exercice 1) que l'ensemble des nombres complexes peut-être identifié avec le plan $\mathcal{P}$. Nous allons maintenant écrire les transformations du plan, celles appelées *similitudes*, avec les nombres complexes. Ces transformations sont celles qui conservent les angles. L'ensemble des similitudes directes est constitué des *translations*, de *rotations* , d'*homothéties*, et de leurs compositions.

4.1 Rappels

Soit f une transformation du plan. Soient M et M' les points du plan d'affixe z et z' respectivement. On note $z' = f(z)$ l'image de z ; on a $f(M) = M'$ (par l'exercice 1, $M' = f(M) \Leftrightarrow z' = f(z)$).

Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, l'affixe de $\vec{u}$ est l'affixe du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

On rappelle brièvement les définitions des transformations élémentaires du plan : translations, rotations, homothéties et similitudes.

Translations : f est une translation de vecteur $\vec{u}$ si :

$$M' = f(M) \text{ si et seulement si } \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Soit z_u l'affixe de $\vec{u}$. Alors $M' = f(M) \Leftrightarrow z' = f(z) \Leftrightarrow z' - z = z_u$, cad :

$$\boxed{f(z) = z + z_u.}$$

Rotations : f est une rotation de centre A et d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ si :

$$M' = f(M) \text{ si et seulement si } (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \theta \text{ et } ||\overrightarrow{AM}|| = ||\overrightarrow{AM'}||.$$

Soit z_A l'affixe de A. Alors $M' = f(M) \Leftrightarrow z' = f(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z' - z_A) = \arg(z - z_A) + \theta \\ \quad \text{et} \\ |z' - z_A| = |z - z_A| \end{cases}$.

Donc $z' = f(z) \Leftrightarrow z' - z_A = (z - z_A)e^{i\theta}$ (par les théorèmes 2.5 et 2.4) cad

$$\boxed{f(z) = z_A + (z - z_A)e^{i\theta}.}$$

Homothéties : f est une homothétie de rapport r (où $r \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$) et de centre A si :

$$M' = f(M) \text{ si et seulement si } (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = 0 \text{ et } ||\overrightarrow{AM'}|| = r||\overrightarrow{AM}||.$$

Soit z_A l'affixe du point A. Alors $M' = f(M) \Leftrightarrow z' = f(z) \Leftrightarrow z - z_A$ et $z' - z_A$ ont même argument et $|z' - z_A| = r|z - z_A| \Leftrightarrow z' = r(z - z_A) + z_A$ (par les théorèmes 2.5 et 2.4) ; cad

$$\boxed{f(z) = r(z - z_A) + z_A.}$$

Similitudes : f est une similitude si f est composée d'une rotation g et d'une homothétie h de même centre (peu importe le sens de la composition : $g \circ h = h \circ g$). Soit θ l'angle de g, r le rapport de h et A le centre de g et h. Alors, on dit que f est une similitude de centre A, de rapport r et d'angle θ. En composant les applications, on obtient $f(z) = r\big(g(z) - z_A\big) + z_A$, cad $f(z) = r\big(z_A + (z - z_A)e^{i\theta} - z_A\big) + z_A$:

$$\boxed{f(z) = r(z - z_A)e^{i\theta} + z_A.}$$

ou encore $f(z) = re^{i\theta}z + (1 - re^{i\theta})z_A$. Soit $\alpha = re^{i\theta}$. Alors :

$$\boxed{f(z) = \alpha z + (1 - \alpha)z_A.}$$

On voit que si $z_A = 0$ alors f est la similitude de centre l'origine, de rapport $r = |\alpha|$ et d'angle $\theta =$Arg(α).

Si $z_A \neq 0$ alors $f(z) = \alpha z + \beta$, où $\beta = (1 - \alpha)z_A$. On suppose alors que $\alpha \neq= 1$ sinon $f(z) = z$, c'est-à-dire f est l'identité. Dans ce cas, f est la similitude de centre d'affixe $z_A = \dfrac{\beta}{1 - \alpha}$, de rapport $r = |\alpha|$ et d'angle $\theta =$Arg(α).

Nous terminons en détaillant ces deux derniers cas.

4.2 Similitudes centrées en l'origine

$$\text{Soit } f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) = \alpha z \end{array} \qquad \text{où } \alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$$

On note $z' = f(z)$ l'image de z, M et M' les points du plan d'affixe z et z' respectivement. On distingue les cas $|\alpha| = 1$ et $|\alpha| \neq 1$.

Premier cas : $|\alpha| = 1$. Cela implique : $\left\{\begin{array}{l} |z| = |z'| \\ \text{et} \\ \arg(z') = \arg(z) + \arg(\alpha) \end{array}\right.$

Dans le plan, ces relations correspondent à : $\left\{\begin{array}{l} ||\overrightarrow{OM}|| = ||\overrightarrow{OM'}|| \\ \text{et} \\ (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM'}}) + \arg(\alpha) \text{ i.e. } (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \arg(\alpha) \end{array}\right.$

La transformation f est donc une rotation d'angle $\arg(\alpha)$, de centre O.

Second cas : $|\alpha| = r \in \mathbb{R}_+^*$.
On veut se ramener au cas précédent. On remarque que $\frac{\alpha}{r}$ a pour module 1
On a bien sur : $z' = \alpha z \Leftrightarrow z' = r(\frac{\alpha}{r}z)$. On peut donc décomposer f de la façon suivante :

$$f(z) = g\big(h(z)\big), \text{ où } h(z) = \tfrac{\alpha}{r}z \text{ et } g(z) = rz, \; \forall z \in \mathbb{C}.$$

Alors h est une rotation d'angle $\arg(\dfrac{\alpha}{r}) = arg(\alpha)$ et de centre O. Comme $r \in \mathbb{R}_+^*$, g est une homothétie de rapport r. Par conséquent, f est une similitude de centre O, d'angle $\arg(\alpha)$ et de rapport r

4.3 Similitudes et translations

$$\text{Soit } f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) = \alpha z + \beta \end{array} \qquad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{C} - \{0\}$$

On décompose f de la manière suivante :

$$f(z) = g\big(h(z)\big), \text{ où } h(z) = \alpha z \text{ et } g(z) = z + \beta, \, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Alors h est une similitude de centre O, d'angle $\arg(\alpha)$ et de rapport $|\alpha|$. Tandis que g est une simple translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe β.

– Si $\alpha = 1$, alors $f = g$ est une simple translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe β.

– Sinon, la transformation f admet un point invariant z_0 tel que $z_0 = \alpha z_0 + \beta$, i.e. $z_0 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

Notons que ce point fixe existe si et seulement si $\alpha \neq 1$.
Dans ce cas, $z' - z_0 = \alpha z + \beta - z_0 = \alpha z + \beta - (\alpha z_0 + \beta)$ (car $z_0 = \alpha z_0 + \beta$), donc

$$z' - z_0 = \alpha(z - z_0).$$

La transformation f est une similitude de centre $z_0 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, d'angle $arg(\alpha)$ et de rapport $|\alpha|$.

En conclusion, nous obtenons :

Théorème 4.1

$$\textit{Soit } f \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) = \alpha z + \beta \end{array} \qquad \textit{où } \alpha \in \mathbb{C} - \{0\} \textit{ et } \beta \in \mathbb{C}$$

(i) *Si $\alpha = 1$, alors f est une simple translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe β.*

(ii) *Si $\alpha \neq 1$, alors f est une similitude de centre $z_0 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, d'angle $arg(\alpha)$ et de rapport $|\alpha|$.*

(iii) *Si $\beta = 0$, alors f est une similitude de centre O, d'angle $arg(\alpha)$ et de rapport $|\alpha|$.*

Rappelons qu'une similitude de rapport 1 est une rotation.

---

5 Formule du binôme de Newton

La formule de Newton est une formule mathématique, donnée par Isaac Newton, pour développer une puissance entière quelconque d'un binôme $(a+b)^n$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappelons les formules bien connues :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \ \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Le but recherche est d'obtenir des développements pour toutes les puissances entières $n \in \mathbb{N}$. Pour cela on introduit les notions d'arrangements, combinaisons, coefficients binomiaux.

Définition 5.1 *(p-liste) Soit E un ensemble ayant n éléments et p un entier supérieur ou égal à 1. On appelle p-liste d'éléments de E, toute suite finie $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de p éléments pris dans E.*

Exemple 5.2 *Soit $E = \{1, 2, ..., n\}$ et $p = 2$. Les 2-listes de E sont données par tous les couples (i, j) avec $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Le nombre de ces couples est n^2, car tout élément $i \in E$ se combine avec n'importe quel élément $j \in E$.*

De manière générale nous montrons

Proposition 5.1 *Le nombre de p-listes d'un ensemble E ayant n éléments est n^p.*

Remarque 5.3

Une p-liste est toujours ordonnée ;

Les éléments $x_1, ..., x_p$ ne sont pas nécessairement distincts les uns des autres ;

On utilise les parantèses pour désigner une p-liste $(x_1, ..., x_p)$.

Définition 5.4 *(Arrangement) Un arrangement de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.*

Remarque 5.5

Il n'est pas possible de prendre plus de n éléments distincts dans un ensemble à n éléments, donc il faut considérer $p \leq n$;

Un arrangement est toujours ordonné et sans répétition possible.

Exemple 5.6 *On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ et $p = 2$. L'ensemble des arrangements de 2 éléments de E est*

$$\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}.$$

Il y a 12 arrangements de 2 éléments de E.

Remarque 5.7 *Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments se note A_n^p. Si $p = 1$, nous avons $A_n^1 = n$. Si $p = 0$, il existe un seul arrangement de 0 éléments, c'est la liste vide. Il convient donc d'écrire $A_n^0 = 1$.*

Définition 5.8 *(Permutation) Une permutation d'un ensemble E ayant n éléments est un arrangement des n éléments de E.*

Définition 5.9 *(Factorielle) Pour tout n entier supérieur ou égale à 1 on appelle factorielle de n, et on la note $n!$, le produit de tous les entiers non nuls inférieurs ou égaux à n*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n.$$

Nous avons $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, ...$ Les factorielles vérifient la formule de récurrence

$$n! = n(n-1)!, \quad n \geq 2.$$

La formule précédente reste valable pour $n = 1$ si on introduit la convention $0! = 1$. Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est le nombre d'arrangements des n éléments de E, c'est-à-dire A_n^n.

Exemple 5.10 *On prend $E = \{M, A, T, H\}$. Les listes $(M, A, T, H), (M, A, H, T)$ sont des permutations de E. Les listes $(M, A, T, A), (M, A, H, T, A)$ ne sont pas de permutations de E.*

Proposition 5.2 *Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout p entier, $0 \leq p \leq n$ on a*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Preuve. *Pour $p = 0$ nous avons $A_n^0 = 1 = \frac{n!}{(n-0)!}$. Supposons $p \geq 1$. L'ensemble des arrangements de p éléments de E est la réunion disjointe $\cup_{i=1}^n X_i$, où pour tout $i \in \{1, ..., n\}, X_i$ désigne l'ensemble des arrangements de p éléments de E, dont le premier élément est le i-ème élément de E. Evidemment chaque ensemble X_i contient A_{n-1}^{p-1} arrangements, car les derniers $(p-1)$ éléments de chaque arrangement sont à choisir dans un ensemble à $(n-1)$ éléments. On en déduit que $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$. Finalement on obtient la formule des arrangements*

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)A_{n-p}^0 = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Remarque 5.11 *Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est $A_n^n = n(n-1)...(n-n+1) = n!$.*

Définition 5.12 *(Combinaison) Une combinaison de p éléments d'un ensemble E ayant n éléments est un sous-ensemble constitué de p éléments pris parmi les n éléments de E.*

Remarque 5.13

On parle sous-ensembles, on utilise donc des accolades;
Une combinaison est une partie non ordonnée et sans répétition de p éléments de E.

Exemple 5.14 *Soit $E = \{M, A, T, H\}$. Les parties $\{M, A, T\}, \{M, A, H\}$ sont deux combinaisons de E de 3 éléments. Les parties $\{M, A, T\}, \{M, T, A\}$ représentent la même combinaison.*

Proposition 5.3 *Le nombre de combinaisons de p éléments, noté C_n^p où $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, d'un ensemble à n éléments est*

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

Preuve. *Si $p = 0$, $C_n^0 = 1 = \frac{n!}{0!n!}$, car il existe un seul sous-ensemble à 0 éléments; c'est le sous-ensemble vide. Si $p = n$, alors $C_n^n = 1 = \frac{n!}{n!0!}$, car il existe un seul sous-ensemble à n éléments; c'est l'ensemble lui même. Considérons maintenant $p \in \{1, ..., n-1\}$. Pour toute combinaison de p éléments de E, par permuation de ces p éléments on peut former $p!$ arrangements de p éléments de E. Ainsi, deux combinaisons distinctes donnent deux ensembles disjoints de p arrangements. Le nombre d'arrangements de p éléments est $p!$ fois le nombre de combinaisons de p éléments, d'où*

$$A_n^p = p!C_n^p$$

et par conséquent

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Proposition 5.4 *Les nombres C_n^p vérifient les relations suivantes :*
i) Pour tout entier naturel n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$ on a $C_n^p = C_n^{n-p}$.
ii) Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$ on a

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}.$$

Preuve. *i) D'après la formule des combinaisons on a*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^{n-p}.$$

ii) Soit E un ensemble à n éléments et a un élément de E. Dénombrons les parties de E à p éléments en considérant les parties qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a. Une partie de E à p éléments contenant a, contient aussi $(p-1)$ éléments choisis parmi les éléments de E autres que a. Le nombre de ces parties est C_{n-1}^{p-1}. Une partie de E à p éléments de E ne contenant pas a contient p éléments choisis parmi les $(n-1)$ éléments de E autres que a. Le nombre de ces parties est C_{n-1}^p. On en déduit que

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

5.1 Triangle de Pascal

La deuxième formule permet de calculer les nombres C_n^p de proche en proche en formant le trinagle suivant, dit de Pascal, dans lequel la n-ème ligne L_n contient les nombres $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$.

$$\begin{array}{lccccccccc}
L_0 & & & & & 1 & & & & \\
L_1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
L_2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
L_3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
L_4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Le premier et le dernier élément sur chaque ligne vallent 1, car $C_n^0 = C_n^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant la formule

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

c'est-à-dire tous les autres nombres du tableau sont la sonne des voisins placés au-dessus.

5.2 Binôme de Newton

Soient a, b deux nombres complexes. On a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \ \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Les coefficients des termes des membres de droites sont respectivement $\{1,2,1\}$ et $\{1,3,3,1\}$. On retrouve la deuxième ligne L_2 et la troisième ligne L_3 du triangle de Pascal. Ce résultat est valable en général, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est la formule du binôme de Newton.

Théorème 5.15 *(Formule du binôme de Newton) Soit a, b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}.$$

Preuve. *Pour $n = 0$ nous avons $(a+b)^0 = 1 = C_0^0 a^0 b^0$. Supposons la formule du binôme vraie pour $(n-1)$ et montrons cette formule pour $n \geq 1$. Nous avons*

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} \\
&= (a+b)\sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p a^p b^{n-1-p} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p a^{p+1} b^{n-1-p} + \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p a^p b^{n-p} \\
&= \sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} a^p b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p a^p b^{n-p} \\
&= C_{n-1}^0 b^n + \sum_{p=1}^{n-1} \left[C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p\right] a^p b^{n-p} + C_{n-1}^{n-1} a^n \\
&= C_n^0 b^n + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p a^p b^{n-p} + C_n^n a^n \\
&= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la formule du binôme de Newton est vérifiée aussi pour n.

Remarque 5.16 *Les nombres $C_n^p, 0 \leq p \leq n$ sont aussi appelés les coefficients binomiaux.*

Corollaire 5.17 *On a les égalités suivantes*

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n, \ \ \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 0.$$

Preuve. *On applique la formules du binôme de Newton avec $a = b = 1$ et $a = -1, b = 1$ respectivement.*

Voyons comment peut-on calculer les sommes de la forme $\sum_{p=0}^{n} p^k$ pour k donné.

Exemple 5.18 *Calculer les sommes $\sum_{p=0}^{n} p$ et $\sum_{p=0}^{n} p^2$ en utilisant les coefficients binomiaux.*

Pour la première somme on écrit

$$\sum_{p=0}^{n} p = \sum_{p=1}^{n} C_p^1 = 1 + \sum_{p=2}^{n} \left[C_{p+1}^2 - C_p^2\right] = 1 + C_{n+1}^2 - C_2^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour la deuxième on procède comme il suit

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} p^2 &= \sum_{p=1}^{n} (p^2 - p) + \sum_{p=1}^{n} p = 2\sum_{p=2}^{n} C_p^2 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2 + 2\sum_{p=3}^{n} \left[C_{p+1}^3 - C_p^3\right] + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2 + \frac{n(n+1)}{2} + 2C_{n+1}^3 - 2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$