Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2014-2015

Géométrie et arithmétique 1

Examen

Calculette et documents non autorisés

Durée : 2 heures

Exercice 1

1. Donner la définition du PGCD entre deux polynômes A et B dans $\mathbb{K}[X]$ et la caractérisation de Bezout de deux polynômes premiers entre eux.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 8i$. Donner l'expression exponentielle et algébrique des solutions.
3. Soient $P_1(X) = X^3 - 8i$ et $P_2(X) = X^3 + 8i$.
Montrer que $-z$ est racine de P_2 si et seulement si z est racine de P_1.
4. En déduire les racines du polynôme $P(X) = X^6 + 64$.
5. En déduire la décomposition en éléments irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

1. Effectuer a division euclidienne de $A(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 2$ par $B(X) = X^2 + 2X + 1$.
2. Donner le PGCD unitaire de $A(X)$ et $B(X)$ (coefficient du plus haut degré égal à un).

Exercice 3

On se place dans le plan orthonormé $\mathbb{R}^2$.
Soient $A(1;2)$ un point du plan et (D) la droite d'équation cartésienne (D) : $x + y + 1 = 0$.
Donner les équations cartésienne et paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire à (D).

Exercice 4

Soient $A(1;2;1), B(3;-2;5)$ et I le milieu du segment $[AB]$.
1. Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par I et perpendiculaire au segment $[AB]$.
2. Soit (D) la droite d'equation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x(t) = & t \\ y = y(t) = & t - 2 \\ z = z(t) = & 2t + 2 \end{cases}$$

Le point I appartient-il à la droite (D) ? La droite (D) est-elle dans le plan (P) ?
3. Donner les coordonnées du point C d'intersection du plan (P) et de la droite (D).
4. Calculer l'aire du triangle (ABC) (penser à la moitié d'un parallélogramme).

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - \sqrt{3}Z + 2 = 0$.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation : $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 2 = 0$.

Exercice 6

Soient T l'application du plan qui envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe $f(z) = (1+i)z + 1$.
On note A le point d'affixe $z_A = 1 - i$ et A' l'image de A par T.
1. Déterminer l'affixe de A'.
2. Résoudre l'équation $f(z) = z$. En déduire que T a un unique point fixe, noté F.
3. Montrer que le cercle de centre C et de rayon R est l'ensemble des points d'affixes dans $\{c + Re^{it} | t \in \mathbb{R}\}$, où c est l'affixe de C.
4. Déterminer l'image par T du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
5. Calculer $\frac{FM'}{FM}$ et l'angle $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})$. En déduire la nature de T.