Aix-Marseille Université	2015-2016

Géométrie et arithmétique 1

PARTIEL 1 - 9 OCTOBRE 2015

DURÉE : 2 HEURES. SANS DOCUMENTS NI CALCULATRICES

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni d'un produit scalaire et soient $u, v \in E$ deux vecteurs.

1. Rappeler les définitions de la colinéarité et de l'orthogonalité de u et v.

   Deux vecteurs u et v de E sont colinéaires si ou bien $u = \vec{0}$ ou bien il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.

   Les vecteurs u et v de E sont orthogonaux par rapport au produit scalaire $<,>$ donné si $< u, v >= 0$.

2. Montrer que si u et v sont non nuls et orthogonaux alors ils ne

   sont pas colinéaires.

   Dans toute la suite on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire donnée, à savoir $\|u\| = \sqrt{< u, u >}$, pour tout $u \in E$.

   Supposons par l'absurde que les deux vecteurs u et v non nuls soient colinéaires et orthogonaux à la fois. D'après la définition de colinéairité, on doit avoir $v = \lambda u$, puisque $u \neq \vec{0}$. L'orthogonalité donne alors $0 =< u, v >=< u, \lambda u >= \lambda\|u\|^2$. Puisque $u \neq \vec{0}$ on a $\|u\|^2 > 0$ et il en suit que $\lambda = 0$. Dans ce cas, cependant, $v = \vec{0}$ ce qui est contre l'hypothèse.

3. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   Pour tous $u, v \in E$ on a

   $$| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$$

   et les deux membres sont égaux si et seulement si u et v sont colinéaires.

Exercice 2 Nous rappelons que *médiatrice* d'un segment est la droite orthogonale à ce segment et passant par son milieu.

Soient $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ trois points du plan.

1. Donner une équation paramétrique de la médiatrice m_{AB} du segment $[AB]$.

   La mediatrice est la droite par le point $H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, qui est le milieu de segment $[AB]$, et de vecteur directeur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Il est facile de vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$. Une équation paramétrique de m_{AB} est alors $\begin{cases} x = & 1+2t \\ y = & 1-t \end{cases}$.

2. Soit $D \in m_{AB}$. Montrer que $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$.

   Puisque la norme d'un vecteur est positive ou nulle, l'égalité considérée est vérifée si et seulement si $\|\overrightarrow{AD}\|^2 = \|\overrightarrow{BD}\|^2$. On considère $\|\overrightarrow{AD}\|^2 = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}) = \|\overrightarrow{AH}\|^2+\|\overrightarrow{HD}\|^2$, où la dernière égalité découle de la linéarité du produit scalaire et de l'orthogonalité entre $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HD}$. Le *même calcul pour $\overrightarrow{BD}$ donne $\|\overrightarrow{BD}\|^2 = \|\overrightarrow{BH}\|^2 + \|\overrightarrow{HD}\|^2$. On a $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB}/2$ et l'homogénéité de la norme permet de conclure.*

On peut aussi montrer l'égalité en calculant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction du paramètre t, puis leur normes.

3. Donner une équation cartésienne de la médiatrice m_{AC} du segment $[AC]$.

   L'équation cartesienne est de la forme $ax + by + c = 0$, où le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est non nul et orthogonal à la médiatrice, donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'équation est alors de la forme $2x - 2y + c = 0$ et on peut calculer c en imposant que la droite passe per le milieu $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ du segment $[AC]$: $2 \times 3 - 2 \times 2 + c = 0$. Cela donne $c = -2$ et l'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$, après simplification.

4. Trouver le point M d'intersection des médiatrices m_{AB} et m_{AC}.

   Un point P appartient à m_{AB} si est seulement s'il est de la forme $\begin{pmatrix} 1+2t \\ 1-t \end{pmatrix}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. P appartient aussi à la droite m_{AC} s'il satisfait l'équation $x + y - 5 = 0$. Les points de m_{AB} qui sont aussi de m_{AC} sont ceux qui satisfont $(1 + 2t) - (1 - t) - 1 = 0$. Cela arrive si et seulement si $t = 1/3$, ce qui donne $M \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CM}\|$.

   Nous avons montré dans 2 que tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités du segment. Puisque nous n'avons pas utilisé les coordonnées de A et B cela est valable pour tout choix de A et B, en particulier pour A et C. Il en suit que le point M qui appartient aux médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$ est équidistant de A, B et C.

Exercice 3 Soient $A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quatre points de l'espace.

1. Vérifier que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

   Il est facile de voir que les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, puisqu'ils ne sont pas proportionnels, et donc les trois points ne sont pas alignés.

2. Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par ces trois points ; puis une équation cartésienne.

   Le plan est $A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB} + \mathbb{R}\overrightarrow{AC}$. Une équation paramétrique est

$$\begin{cases} x = & -1 + 3s \\ y = & -t + s \\ z = & 1 + t + 2s \end{cases}$$

   En éliminant les paramètres t et s on obtient l'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

3. Donner une équation paramétrique de la droite passant par le point D et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Un vecteur orthogonal au plan, et donc directeur pour la droite, est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *On en déduit une équation paramétrique pour le droite :*

$$\begin{cases} x = & 1+t \\ y = & -2-t \\ z = & -t \end{cases}$$

.

4. Donner la distance du point D au plan $\mathcal{P}$.

   En utilisant la formule $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ *vue en cours on a* $d(D,\mathcal{P}) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 4 Considérons les points $A \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite (AB) et qui est parallèle à l'un des plans d'équation $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$.

   Les plans parallèles aux plans d'équation $x = 0$, $y = 0$ *ou* $z = 0$ *ont équation de la forme* $x = a$, $y = b$ *ou* $z = c$ *respectivement. Il en suit que tous les points de ces plans doivent avoir la même première, deuxième ou troisième coordonnée rispectivement. Puisque les deux points donnés ont la même première coordonnée, il en suit que le plan cherché est parallèle à celui d'équation* $x = 0$ *et a équation* $x = 10$.

2. Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}'$ dont un vecteur générateur est orthogonal au plan $\mathcal{P}$ et qui contient la droite (AB).

   Le plan $\mathcal{P}'$ *est engendré par les vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *orthogonal à* $\mathcal{P}$, *et par le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *et passe par* A. *Une équation paramétrique de* $\mathcal{P}'$ *est donc*

$$\begin{cases} x = & 10+t \\ y = & 1-s \\ z = & 5-3s \end{cases}$$

3. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$.

   En éliminant les paramètres t *et* s *on obtient* $3y - z + 2 = 0$.

4. Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (AB).

   La droite est contenue dans les plans $\mathcal{P}'$ *et* $\mathcal{P}$ *qui ne sont pas confondus. Elle est donc l'intersection de ces deux plans et une équation cartésienne pour la droite est :*

$$\begin{cases} x = 10 \\ 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

   En prénant $y = t$ *comme paramètre on en déduit une équation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = & 10 \\ y = & t \\ z = & 2+3t \end{cases}$$