AMU 2015-2016
Licence MI 1ère année-S1

GÉOMÉTRIE ET ARITHMÉTIQUE

Planche : Nombres complexes

1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1 ⋆⋆

Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres : $\frac{3+6i}{3-4i}$, $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}$, $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 2 ⋆⋆

Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants.
1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 3 ⋆⋆

Effectuer les calculs suivants :
1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice 4

Établir les égalités suivantes :
1. $(\cos(\pi/7)+i\sin(\pi/7))(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i)=\sqrt{2}(\cos(5\pi/84)+i\sin(5\pi/84))$,
2. $(1-i)(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i)=2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60)+i\sin(13\pi/60))$,
3. $\frac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12))}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

Exercice 5

Calculer le module et l'argument de $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $w=\frac{u}{v}$.

Exercice 6 ⋆⋆

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes : $e^{e^{i\alpha}}$, et $e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.

Exercice 7

Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 8

Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 9

Placer les points d'affixe z_1,z_2,z_3 dans un repère orthonormé du plan :

$$z_1=-1+i,\quad z_2=2+i,\quad z_3=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\ .$$

EXERCICE 10 **

Écrire z_1, z_2, z_3 sous forme polaire (c'est à dire sous la forme $\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$ avec ρ réel positif et θ réel) :

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}} \ .$$

EXERCICE 11

Chacune des formules suivantes est fausse. Montrez-le sans faire les calculs :

$$e^{\frac{2i\pi}{7}} e^{-\frac{3i\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{2}i$$

$$(1+i)(1-i) = 0$$

$$(1+i)(1-i) = 1$$

EXERCICE 12 **

Placer les points d'affixe z_1, z_2, z_3 dans un repère orthonormé du plan :

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = \sqrt{2}\ e^{\frac{i\pi}{4}} \ .$$

EXERCICE 13 **

Soit α un nombre complexe différent de 0. Quel est le module de $\alpha/\bar{\alpha}$?

EXERCICE 14

Soient a, b deux nombres réels. Déterminer l'ensemble des nombres réels x, y vérifiant :

$$(x + ai)(b + yi) = 4 + 3i$$

Discuter selon les valeurs de a et b (suivant si $a = 0$, $b = 0$ et la valeur du produit ab).

EXERCICE 15

Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes. Montrer que $Re(z) = |z|$ si et seulement si z est un nombre réel positif ou nul.

Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\big(z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou $\text{Arg}(z_1)=\text{Arg}(z_2)\big)$.

2 Trigonométrie et binôme

EXERCICE 16 **

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme polaire de $(1+i)^n$. Pour quelles valeurs de n, $(1+i)^n$ est-il un nombre réel ?

Repondre à la même question en développant $(1+i)^n$ avec la formule du binôme.

EXERCICE 17 **

À l'aide de formules du binôme, simplifier :

1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$.
2. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\big((k+1)\theta\big)$.
3. $\cos a + C_n^1 \cos(a+b) + C_n^2 \cos(a+2b) + \cdots + C_n^n \cos(a+nb)$.
4. $\sum_{k=0}^{[n/3]} C_n^{3k}$. (On calculera d'abord, $1 + j^k + \bar{j}^k = 0$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ suivant la valeur de k).

EXERCICE 18 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
1. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
2. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 0$
3. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.

EXERCICE 19

Soit x un nombre réel. On note $C = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$,
et $S = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$. Calculer C et S.

EXERCICE 20

1. En utilisant les formules d'Euler, linéariser (c'est à dire transformer de produit en somme) (a, $b \in \mathbb{R}$) :

$$2\cos a \cos b \quad ; \quad 2\sin a \sin b \quad ; \quad \cos^2 a \quad ; \quad \sin^2 a.$$

2. À l'aide de la formule : $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ (x, $y \in \mathbb{R}$), retrouver celles pour $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ et $\tan(x+y)$ en fonction de sinus, cosinus et tangente de x ou de y; en déduire les formules de calcul pour $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ et $\tan(2x)$ (x, $y \in \mathbb{R}$).

3. Etablir la formule de Moivre ($\theta \in \mathbb{R}$) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

EXERCICE 21 **

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

EXERCICE 22

1. Effectuer le développement de $(1+x)^4$ par la formule du binôme de Newton (on conservera les coefficients binomiaux sans chercher à les simplifier).

2. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(1+x)^4(1+x)^4$ (on ne simplifiera pas la somme de produits que l'on obtient)?

3. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(1+x)^8$?

4. En tenant compte de la symétrie des coefficients binomiaux, démontrer que

$$(C_4^0)^2 + (C_4^1)^2 + (C_4^2)^2 + (C_4^3)^2 + (C_4^4)^2 = C_8^4.$$

5. Généralisation : En remarquant que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, montrer que l'on a

$$\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2 = C_{2n}^n.$$

6. On veut calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2.$$

Montrer que

$$S = \sum_{k=0}^{n} (n-k)(C_n^k)^2.$$

En déduire $2S$, puis S.

Exercice 23

En utilisant la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$, calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k, \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 C_n^k.$$

Réponse : $S_1 = n2^{n-1}, S_2 = n(n+1)2^{n-2}, S_3 = n^2(n+3)2^{n-3}$.

Exercice 24

Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les sommes

$$S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ..., \quad S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ...$$

Exercice 25

Soit $n \in \mathbb{N}$ et p un entier vérifiant $0 \leq p \leq n$.

1. Montrer que

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x} = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + ... + (1+x)^n.$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}.$$

3. Ecrire ces égalités pour $p = 2$ et $p = 3$.

4. En déduire les sommes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^2(k+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

3 Géométrie

Exercice 26 **

Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que z, $1/z$, et $z-1$ aient le même module.

Exercice 27

1. Déterminer les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$. Donner une interpretation géométrique de cet ensemble. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = k$ $(k > 0,\ k \neq 1)$. Donner une interpretation géométrique de ces ensembles. Généraliser pour $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$.

Exercice 28

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition :

$$z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R}\ .$$

Exercice 29

Soient M_1, M_2 et M_3 trois points d'affixe z_1 , z_2 et z_3 respectivement.
1. Montrer que ces trois points sont les sommets d'un triangle isocèle s'il existe $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ de module 1 tel que

$$(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2 - z_3 = 0$$

2. Montrer la réciproque.
3. Exprimer l'angle en M_1 en fonction de α.

Exercice 30

1. Soit A, B, C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral (j et j^2 sont les racines cubiques complexes de 1 — plus précisément $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$). La réciproque est-elle vraie ?
2. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$? Comparer les triangles OBC, DBA et EAC.

Exercice 31 **

Définir au moyen de nombres complexes la rotation de centre $2 + 3i$ et d'angle $\pi/3$.
Définir au moyen de nombres complexes la similitude de centre z_0, d'angle α et de rapport $a \neq 0$, c'est à dire la composée de la rotation de centre z_0 et d'angle α avec l'homothétie de centre z_0 et de rapport a.

Exercice 32

1. Montrer que les ensembles suivants sont égaux et déduire qu'ils coïncident avec la droite par z_0 et de vecteur directeur d'affixe $w \neq 0$:
$$\{z = z_0 + \lambda w \in \mathbb{C} | \lambda \in \mathbb{R}\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} | \bar{w}z - w\bar{z} = \bar{w}z_0 - w\bar{z}_0\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} | \bar{u}z + u\bar{z} = \bar{u}z_0 s + -u\bar{z}_0\} \text{ où } u = -iw = a + ib,$$
$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} | ax + by + c = 0\} \text{ où } 2c = u\bar{z}_0 + \bar{u}z_0.$$
2. Montrer que les ensembles suivants sont égaux et déduire qu'ils coïncident avec le cercle de centre z_0 et rayon $r > 0$:
$$\{z = z_0 + re^{it} | t \in \mathbb{R}\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r\},$$
$$\{z \in \mathbb{C} | z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} = r^2 - |z_0|^2\}.$$

Exercice 33

Dans tout l'exercice on pourra utiliser les exercices précédents.
Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude du plan.
1. Montrer que si $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ est une droite alors $f(\mathcal{D})$ l'est aussi.
2. Montrer que si $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ est un cercle alors $f(\mathcal{C})$ l'est aussi.

Exercice 34

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Donner les affixes $\omega_0, \ldots, \omega_4$ des points $A_0, \ldots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$ et que $\omega_1^{5-k} = \overline{\omega_1^k}$.

2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).

4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.

5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

EXERCICE 35

Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = 1/\bar{z}$.
1. Montrer que $f \circ f = Id_{\mathbb{C}^*}$.

2. Montrer que si $\mathcal{D}^*$ est une droite vectorielle privée de l'origine, alors $f(\mathcal{D}^*) = \mathcal{D}^*$.
3. Montrer que si $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^*$ est une droite (non vectorielle, alors l'ensemble $f(\mathcal{D})$ est égal à $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ où $\mathcal{C}$ estun cercle qui passe par l'origine 0. Réciproquement, montrer que l'image par f d'un cercle qui passe par l'origine et privé de celle-ci est une droite qui ne passe pas par l'origine.
4. Montrer que si $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^*$ est un cercle alors $f(\mathcal{C})$ l'est aussi.
Dans tout l'exercice on pourra utiliser l'exercice 23.

4 Résolution d'équation et racine n-ième

EXERCICE 36 ⋆⋆

Calculer les racines carrées de $1,\ i,\ 3+4i,\ 8-6i$, et $7+24i$.

EXERCICE 37

Soit $z = a + ib$, avec a, b réels tels que $z^2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
Montrer que $a^2 + b^2 = 1$, puis que $a^2 - b^2 = 1/2$ et $ab = \sqrt{2}/4$.
En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

EXERCICE 38 ⋆⋆

Trouver les racines cubiques de $2 - 2i$ et de $11 + 2i$.

EXERCICE 39 ⋆⋆

1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1,\ j,\ j^2$.Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les racines de $1 + z + z^2 = 0$.
2. Calculer $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.
3. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{n-1}$.
En déduire les racines de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$.
Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1 + \epsilon^p + \epsilon^{2p} + \cdots + \epsilon^{(n-1)p}$.

EXERCICE 40

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

EXERCICE 41

Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

EXERCICE 42

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.

Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$.
(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9+i)^2$)

EXERCICE 43

Trouver les racines carrées de $3-4i$ et de $24-10i$.

EXERCICE 44

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

EXERCICE 45

Montrer que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

EXERCICE 46 **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ;$$

EXERCICE 47

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0 \; ; \; z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0 \; ; \; 4z^2 - 2z + 1 = 0 \; ;$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 1 Calculer sous forme algébrique :

a) $(-2+3i)+(7-8i)$; **b**) $(4i-3)-(1-10i)$; **c**) $(3i-1)+(4-5i)$; **d**) $(1+i)\cdot(-2-i)$;

e) $(\sqrt{2}+i)\cdot(3-\sqrt{3}i)$; **f**) $(4+i)\cdot(i-4)$; **g**) $\dfrac{2-3i}{5-4i}$; **h**) $\dfrac{2+3i}{1+i}$; **i**) $\dfrac{6-i}{i}$.

Exercice 2 Trouver les nombres réels x et y tels que :

a) $x(2+3i)+y(4-5i) = 6-2i$;

b) $(x-i)\cdot(2-yi) = 11-23i$;

c) $\dfrac{x}{2-3i}+\dfrac{y}{3+2i} = 1$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

a) $z^2+3\bar{z} = 0$; **b**) $2z+(1+i)\bar{z} = 1-3i$; **c**) $z^2-2iz-1 = 0$;

d) $\dfrac{z+1}{\bar{z}-1} = -1$; **e**) $(z+\bar{z})+i(z-\bar{z}) = 2i-6$; **f**) $\dfrac{1-3i}{3z+2i} = \dfrac{2i-3}{5-2iz}$.

Exercice 4 Dans le plan complexe dessiner les ensembles donnés par les conditions suivantes:

a) $\mathrm{Im}[(1+2i)z-3i] < 0$; **b**) $\mathrm{Re}(z-i)^2 \geq 0$; **c**) $\dfrac{4}{z} = \bar{z}$;

d) $z^2 = 2\mathrm{Re}(iz)$; **e**) $\overline{z-i} = z-1$.

Exercice 5 Trouver les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles le nombre complexe

$$u = \frac{z}{z+i}$$

est **a)** réel; **b)** imaginaire pur ?

Exercice 6 Dessiner dans le plan complexe les ensembles donnés par les rélations suivantes:

a) $|z+1-2i| = 3$; **b**) $2 < |z+i| \leq 4$; **c**) $|(1+i)z-2| \geq 4$;

d) $\left|\dfrac{z+3}{z-2i}\right| \geq 1$; **e)** $|z^2+4| \leq |z-2i|$; **f)** $|\bar{z}+2-i| \leq |z|$;

g) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$; **h)** $\arg(z+i) = \pi\ [2\pi]$; **i)** $\dfrac{\pi}{4} \leq \arg(-\bar{z})\ [2\pi] < \dfrac{\pi}{2}$;

j) $\arg(z+2-i) = \pi\ [2\pi]$; **k)** $\arg\left(\dfrac{i}{z}\right) = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$; **l)** $\dfrac{\pi}{2} < \arg(z^3)\ [2\pi] < \pi$.

Exercice 7 Représenter sous la forme algébrique, trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5(2+2i)^3}{(1-i)^7}$; **b)** $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^4(1+i)^9}{(1+i\sqrt{3})^{10}}$; **c)** $\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^{24}$.

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la somme

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

1. S_n est une somme de $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique. Rappeler la formule qui donne la valeur de S_n en fonction de x.
2. En sachant que la formule trouvée dans la question précédente est toujours valable pour $x \in \mathbb{C}$, calculer $S_n(e^{i\alpha})$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Calculer par ailleurs la même somme $S_n(e^{i\alpha})$ en utilisant la formule de Moivre.
4. En déduire les valeurs des expressions suivantes :

   a) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha, \quad n \in \mathbb{N}$;

   b) $1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha, \quad n \in \mathbb{N}$;

   c) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha, \quad n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9
a) Calculer les racines carrées de $z = i$ en se servant de la forme algébrique des nombres complexes.
b) Refaire le calcul sous la forme exponentielle et vérifier les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$.
c) Faire le travail analogue pour $z = 1 + \sqrt{2} + i$ et en déduire les valeurs de $\sin\frac{\pi}{16}$ et $\cos\frac{\pi}{16}$.
d) Sous la forme algébrique calculer les racines cubiques de $z = i$.

Exercice 10 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) A l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\sin(5\alpha)$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.
b) Utiliser l'identité $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ pour ramener la formule trouvée au point précédent à la forme

$$\sin(5\alpha) = A\sin\alpha + B\sin^3\alpha + C\sin^5\alpha, \qquad (\blacktriangle)$$

où A, B, C sont des coeficients réels que l'on précisera.
c) En posant $\alpha = \pi/5$, déduire de l'équation ($\blacktriangle$) la valeur de $\sin\pi/5$, puis celle de $\cos\pi/5$.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et tracer leurs solutions dans le plan complexe :

a) $z^6 = 1$; **b)** $z^4 = -1$; **c)** $z^2 = 1+i\sqrt{3}$; **d)** $z^2 = 4i-3$;

e) $z^3 = 8$; **f)** $z^5 = 32i$; **g)** $z^2 = (5-4i)^4$; **h)** $z^3 = (2-i)^6$.

Exercice 12 Trouver les solutions $z \in \mathbb{C}$ de :

a) $z^2 = \bar{z}$; **b)** $\overline{z^4} = z^2|z^2|$; **c)** $|z|^3 = iz^3$; **d)** $|z^8| = z^4$;

Exercice 13 Trouver les racines des polynômes suivants :

a) $z^2+3z+3-i = 0$; **b)** $z^2+(2i-1)z+1+5i = 0$; **c)** $z^4-4i\sqrt{3}z^2-16 = 0$;

d) $z^6+(2-6i)z^3+16-16i = 0$.

Exercice 14 Le point $z = 4 - i$ est un des sommets d'un carré K dans le plan. Trouver les trois autres sommets dans le cas où le centre de K est situé **a)** en l'origine; **b)** en u=1.