# Atelier problème - Suites de Farey

Dans ce problème on aura besoin d'utiliser le théorème de Bezout : deux entiers $p$ et $q$ sont premiers entre eux ssi il existe des entiers (relatifs) $u$ et $v$ tels que $up + vq = 1$.
On rappelle qu'une *fraction* est une représentation d'un nombre rationnel sous la forme $a/b$ où $a$ et $b$ sont des entiers, $b$ non nul. La fraction est *irréductible* si $a$ et $b$ sont premiers entre eux. En particulier les formes fractionnaires irréductibles de 0 et 1 sont $0/1$ et $1/1$.
Dans toute la suite, les variables $n$, $a$, $a'$, $b$, $b'$, $c$ et $d$, ... désigneront des entiers positifs ou nuls. Lorsque l'on écrit une fraction comme $a/b$ on suppose implicitement que $b$ est non nul.

Soit $n$ un entier strictement positif. La *suite de Farey d'ordre* $n$ est la suite ordonnée des nombres rationnels compris (au sens large) entre 0 et 1 dont la forme irréductible est de dénominateur inférieur ou égal à $n$. La suite de Farey d'ordre 1 est donc $(0/1, 1/1)$, celle d'ordre 2 est $(0/1, 1/2, 1/1)$, ...

i) Écrire les suites de Farey d'ordre 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

Soient $a/b$ et $a'/b'$ deux fractions et $n$ un entier strictement positif ; on dit que $a/b$ et $a'/b'$ sont *consécutives à l'ordre* $n$ si elles sont irréductibles et consécutives dans la suite de Farey d'ordre $n$ ; autrement dit $a/b$ et $a'/b'$ sont consécutives à l'ordre $n$ si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- $a/b$ et $a'/b'$ sont irréductibles,
- $a/b < a'/b'$,
- pour toute fraction irréductible $c/d$, si $a/b < c/d < a'/b'$ alors $d > n$.

ii) Trouver le premier entier $d$ tel que il existe une fraction $c/d$ strictement comprise entre $1/3$ et $1/2$ (autrement dit, trouver le premier $d$ tel que $1/3$ et $1/2$ ne sont plus consécutives à l'ordre $d$). Même question avec $1/4$ et $1/3$, puis avec $1/3$ et $2/5$, puis avec $3/4$ et $4/5$, puis avec $2/3$ et $5/7$. Que remarque-t-on ?

iii) Soient $a/b$ et $a'/b'$ deux fractions. Montrer que si $a'b - ab' = 1$ alors $a/b$ et $a'/b'$ sont consécutives à l'ordre $\max(b, b')$. (Cette question est difficile, si vous n'y arrivez pas admettez le résultat et passez à la suite)

iv) Soient $a/b$ et $a'/b'$ deux fractions irréductibles telles que $a/b < a'/b'$. Montrer que la fraction *médiane* $(a + a')/(b + b')$ (qui n'est pas forcément irréductible) est comprise strictement entre $a/b$ et $a'/b'$, c'est à dire que $a/b < (a + a')/(b + b') < a'/b'$.

v) Montrer que si $a'b - ab' = 1$ alors les trois fractions $a/b$, $(a + a')/(b + b')$ et $a'/b'$ sont consécutives à l'ordre $b + b'$ (ne pas oublier de commencer par montrer qu'elles sont toutes les 3 irréductibles).

vi) En déduire que si $a'b - ab' = 1$ et $c/d$ est une fraction irréductible telle que $a/b < c/d < a'/b'$ alors $d \geq b + b'$. Si de plus $d = b + b'$ alors $c = a + a'$.

vii) Montrer par récurrence sur $n$ que pour tous entiers naturels $a$, $b$, $a'$, $b'$, si $a/b$ et $a'/b'$ sont consécutives à l'ordre $n$ alors $a'b - ab' = 1$.

viii) Montrer que si $a/b$, $c/d$ et $a'/b'$ sont consécutives à l'ordre $n$ alors $c/d$ est la médiane de $a/b$ et $a'/b'$. En déduire que si $n = d$ alors $b$ et $b'$ sont tous deux strictement inférieurs à $d$.

ix) En déduire que pour toute fraction irréductible $c/d$ telle que $0 < c/d < 1$ il existe un $n < d$ et deux fractions $a/b$ et $a'/b'$ consécutives à l'ordre $n$ et vérifiant que $c/d$ est leur fraction médiane.

Cette dernière question montre que toute fraction irréductible peut être atteinte en prenant la médiane de deux fractions irréductibles de dénominateurs plus petits ; cette propriété est utilisée pour construire l'*arbre de Stern-Brocot* qui réalise une bijection des entiers dans les rationnels compris entre 0 et 1.