



Les calculatrices et les documents sont interdits. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

EXERCICE 1

1. Résoudre l'équation réelle

$$\ln(x - 2) + \ln(x - 3) = \ln(6).$$

2. On considère l'équation réelle

$$(E) \quad x^x = (\sqrt{x})^{x+1}.$$

- (a) Pour tout $a \in]0, +\infty[$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, donner la définition de a^b .
(b) En utilisant la question précédente, résoudre l'équation (E).

EXERCICE 2

On considère la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-\ln(x)}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \exp[-(\ln(x))^2]$.
2. Déterminer

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} [f(x)] \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)].$$

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.
4. Dresser le tableau des variations de f .
5. Déterminer, en utilisant les théorèmes du cours, les ensembles $f(]0, 1])$ et $f([1, +\infty[)$, puis en déduire l'ensemble $f(]0, +\infty[)$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(\sqrt{1+x^2} - x).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble de dérivation de f . On notera E cet ensemble.
3. Démontrer que pour tout $x \in E$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

4. Déduire de la question précédente une autre expression de f .

EXERCICE 4

1. On considère l'application

$$f :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donner les primitives de l'application f sur $] - 1, 1[$.

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^9(x) \cos(x) dx, \quad \int_0^1 \frac{\exp(x)}{1 + \exp(x)} dx.$$

EXERCICE 5

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$I_n = \int_1^e x^2 \ln(x)^n dx.$$

1. En faisant une intégration par parties, calculer I_1 .
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$