Université d'Aix-Marseille

Portail Descartes
2018-2019

Langage Mathématique

Partiel – 26 octobre 2018

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

Soit X un ensemble d'entiers naturels.

1. Écrire formellement les trois énoncés suivants :
 1.1. (P_1) : tous les éléments de X sont pairs ;
 1.2. (P_2) : tous les entiers pairs sont dans X ;
 1.3. (P_3) : aucun entier pair n'est dans X.
 1.4. (P_4) : il y a des entiers pairs qui ne sont pas dans X.

On considère l'assertion $Q(n)$: « si $n \in X$ alors $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$ ».

2. Écrire la contraposée $Q'(n)$ de $Q(n)$.
3. Écrire la réciproque $R(n)$ de $Q(n)$.
4. Lequel des énoncés (P_1), (P_2) ou (P_3) est-il équivalent à (P) : $\forall n \in \mathbb{N},$ si $n \in X$ alors $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$?
5. Écrire la négation de (P).

Exercice 2

Pour chacun des énoncés suivants remplacer le symbole $\square$ par le symbole correct que l'on choisira parmi $\in$, $\subset$ ou $=$:

1. $0 \square 0$;
2. $0 \square \{0, 1\}$;
3. $\{0\} \square \{0, 1\}$;
4. $0 \square [0, 1]$;
5. $\{0\} \square [0, 1]$;
6. $\{0\} \square \mathbb{N}$;
7. $[0, 1] \square \mathbb{R}$;
8. $(0, 1) \square \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
9. $\{0\} \square \mathscr{P}(\mathbb{N})$;
10. $\emptyset \square \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
11. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x - 1\} \square \mathscr{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$;
12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x - 1\} \square \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = \frac{y+1}{2}\}$.

Exercice 3

1. Soient A, B et C trois ensembles ; montrer que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Soit f une application de E dans F, $A \subset E$ et $B \subset F$. On note ${}^cA = E \setminus A$ et ${}^cB = F \setminus B$.

2. Démontrer que $f^{-1}({}^cB) = {}^c(f^{-1}(B))$.

Tourner SVP

3. Soient $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $f : E \to F$ une application et $A = [0, +\infty[$. Déterminer l'intersection de $f({}^cA)$ et de ${}^c(f(A))$ dans chacun des deux cas suivants :

3.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$.

3.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

Exercice 4

1. Rappeler la définition de relation d'équivalence.

2. Écrire formellement chacune des propriétés qui définissent une relation d'équivalence.

On suppose que $\mathscr{R}$ est une relation sur $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ définie par :

$$(a, b) \mathscr{R} (a', b') \text{ ssi } a + b' = a' + b$$

3. Donner tous les cas où deux des couples parmi les suivants sont en relation par $\mathscr{R}$: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$.

4. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

5. Donner tous les couples (a, b) qui sont en relation avec $(0, 0)$ puis tous ceux en relation avec $(0, 1)$.

6. Montrer que si $(a, b) \mathscr{R} (a', b')$ et $(c, d) \mathscr{R} (c', d')$ alors :

6.1. $(a + c, b + d) \mathscr{R} (a' + c', b' + d')$;

6.2. $(ac + bd, ad + bc) \mathscr{R} (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$.