

Langage Mathématique

Partiel – 26 octobre 2018

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1Soit X un ensemble d'entiers naturels.

1. Écrire formellement les trois énoncés suivants :

1.1. (P_1) : tous les éléments de X sont pairs ;RÉPONSE. $\ll \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \in X \text{ alors } \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \gg$ ou plus concis : $\ll \forall n \in X, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \gg$.1.2. (P_2) : tous les entiers pairs sont dans X ;RÉPONSE. $\ll \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \text{ alors } n \in X \gg$, ou équivalent : $\ll \forall n, k \in \mathbb{N}, \text{ si } n = 2k \text{ alors } n \in X \gg$, ou encore plus concis : $\ll \forall k \in \mathbb{N}, 2k \in X \gg$.1.3. (P_3) : aucun entier pair n'est dans X .RÉPONSE. Mêmes réponses qu'à la question précédente en remplaçant $\ll n \in X \gg$ par $\ll n \notin X \gg$, ou par $\ll n \in \mathbb{N} \setminus X \gg$; par exemple : $\ll \forall k \in \mathbb{N}, 2k \notin X \gg$ ou $\ll \forall k \in \mathbb{N}, 2k \in \mathbb{N} \setminus X \gg$.1.4. (P_4) : il y a des entiers pairs qui ne sont pas dans X .RÉPONSE. $\ll \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \text{ et } n \notin X \gg$, ou plus concis : $\ll \exists k \in \mathbb{N}, 2k \notin X \gg$ ou aussi $\ll \exists k \in \mathbb{N}, 2k \in \mathbb{N} \setminus X \gg$.On considère l'assertion $Q(n)$: $\ll \text{ si } n \in X \text{ alors } \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \gg$.2. Écrire la contraposée $Q'(n)$ de $Q(n)$.RÉPONSE. $\ll \text{ si } \forall k \in \mathbb{N}, n \neq 2k \text{ alors } n \notin X \gg$.3. Écrire la réciproque $R(n)$ de $Q(n)$.RÉPONSE. $\ll \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \text{ alors } n \in X \gg$.4. Lequel des énoncés (P_1) , (P_2) ou (P_3) est-il équivalent à (P) : $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \in X \text{ alors } \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$?RÉPONSE. L'énoncé équivalent à (P) est (P_1) .5. Écrire la négation de (P) .RÉPONSE. $\ll \exists n \in \mathbb{N}, n \in X \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, n \neq 2k \gg$.**Exercice 2**Pour chacun des énoncés suivants remplacer le symbole $\square$ par le symbole correct que l'on choisira parmi $\in, \subset$ ou $=$:1. $0 \square 0$;RÉPONSE. $0 = 0$ 2. $0 \square \{0, 1\}$;RÉPONSE. $0 \in \{0, 1\}$ 3. $\{0\} \square \{0, 1\}$;RÉPONSE. $\{0\} \subset \{0, 1\}$ 4. $0 \square [0, 1]$;RÉPONSE. $0 \in [0, 1]$ 5. $\{0\} \square [0, 1]$;RÉPONSE. $\{0\} \subset [0, 1]$ 6. $\{0\} \square \mathbb{N}$;RÉPONSE. $\{0\} \subset \mathbb{N}$

7. $[0, 1] \sqsubset \mathbb{R}$;

RÉPONSE. $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

8. $(0, 1) \sqsubset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

RÉPONSE. $(0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

9. $\{0\} \sqsubset \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

RÉPONSE. $\{0\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

10. $\emptyset \sqsubset \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

RÉPONSE. Deux réponses sont possibles : $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\emptyset \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

11. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x - 1\} \sqsubset \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$;

RÉPONSE. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x - 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

12. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x - 1\} \sqsubset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \frac{y+1}{2}\}$.

RÉPONSE. Ici aussi deux réponses sont possibles : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x - 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \frac{y+1}{2}\}$ ou $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x - 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \frac{y+1}{2}\}$ (car $y = 2x - 1$ ssi $x = \frac{y+1}{2}$).

Exercice 3

1. Soient A , B et C trois ensembles ; montrer que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

RÉPONSE. Un couple (x, y) est dans $A \times (B \cup C)$ si et seulement si par définition $(x \in A)$ et $(y \in B \cup C)$. Par définition d'union, ceci est équivalent à $(x \in A)$ et $(y \in B \text{ ou } y \in C)$. Ceci peut se réécrire de façon équivalente comme $(x \in A \text{ et } y \in B)$ ou $(x \in A \text{ et } y \in C)$ ce qui, par définition, signifie que $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Cela montre la double inclusion.

Soit f une application de E dans F , $A \subset E$ et $B \subset F$. On note ${}^cA = E \setminus A$ et ${}^cB = F \setminus B$.

2. Démontrer que $f^{-1}({}^cB) = {}^c(f^{-1}(B))$.

RÉPONSE. Soit $x \in E$. Par définition d'image inverse on a $x \in f^{-1}({}^cB)$ ssi $f(x) \in {}^cB$, c'est-à-dire $f(x) \notin B$ par définition de complémentaire. Mais à nouveau par définition d'image inverse cela est équivalent à $x \notin f^{-1}(B)$ ou encore, par définition de complémentaire, $x \in {}^c(f^{-1}(B))$. Cela montre la double inclusion.

3. Soient $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow F$ une application et $A = [0, +\infty[$. Déterminer l'intersection de $f({}^cA)$ et de ${}^c(f(A))$ dans chacun des deux cas suivants :

3.1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$.

RÉPONSE. On rappelle que l'image directe par f d'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est $f(X) = \{f(x), x \in X\}$.

Le complémentaire de A est ${}^cA =]-\infty, 0[= \mathbb{R}_-^*$. Puisque A contient $[0, 2\pi]$ et son complémentaire contient $[-3\pi, -\pi]$ on a $f(A) = f({}^cA) = [-1, 1]$. Il s'ensuit que l'intersection cherchée est vide.

3.2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

RÉPONSE. On a $f({}^cA) = f(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$. D'autre part $f(A) = [0, +\infty[$ donc ${}^c(f(A)) =]-\infty, 0[= f({}^cA)$. L'intersection cherchée est donc $]-\infty, 0[$.

Exercice 4

1. Rappeler la définition de relation d'équivalence.

RÉPONSE. Soit A un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ de A dans lui-même est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

2. Écrire formellement chacune des propriétés qui définissent une relation d'équivalence.

RÉPONSE. Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur A ; la relation $\mathcal{R}$ est :

- *réflexive* si $\forall a \in A, a \mathcal{R} a$;
- *symétrique* si $\forall a, b \in A$, si $a \mathcal{R} b$ alors $b \mathcal{R} a$;
- *transitive* si $\forall a, b, c \in A$, si $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$ alors $a \mathcal{R} c$.

On suppose que $\mathcal{R}$ est une relation sur $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ définie par :

$$(a, b) \mathcal{R} (a', b') \text{ ssi } a + b' = a' + b$$

3. Donner tous les cas où deux des couples parmi les suivants sont en relation par $\mathcal{R}$: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$.

RÉPONSE. On a que deux couples quelconques (y compris deux fois le même) dans l'ensemble $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ sont en relation entre eux. La même propriété est valable pour les couples de l'ensemble $\{(0, 1), (1, 2)\}$ et ceux de l'ensemble $\{(1, 0), (2, 1)\}$.

On peut aussi exprimer cela par un tableau dans lequel on met un $\mathcal{R}$ dans la case de la ligne (a, b) , colonne (a', b') si $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$:

	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)
(0, 0)	$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$
(0, 1)		$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$			
(0, 2)			$\mathcal{R}$						
(1, 0)				$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$	
(1, 1)	$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$
(1, 2)		$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$			
(2, 0)							$\mathcal{R}$		
(2, 1)				$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$	
(2, 2)	$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$				$\mathcal{R}$

4. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

RÉPONSE. Montrons que $\mathcal{R}$ satisfait les trois propriétés définissant un relation d'équivalence.

- $\mathcal{R}$ est réflexive : soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On a $a + b = a + b$ donc $(a, b) \mathcal{R} (a, b)$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique : supposons $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$, alors par définition $a + b' = a' + b$ ce qui est équivalent à $a' + b = a + b'$ et donc $(a', b') \mathcal{R} (a, b)$.
- $\mathcal{R}$ est transitive : supposons $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$ et $(a', b') \mathcal{R} (a'', b'')$, à savoir $a + b' = a' + b$ et $a' + b'' = a'' + b'$; en sommant terme à terme on obtient $a + b' + a' + b'' = a' + b + a'' + b'$, puis $a + b'' = a'' + b$ en simplifiant $a' + b'$ des deux côtés, donc $(a, b) \mathcal{R} (a'', b'')$ par définition de $\mathcal{R}$.

5. Donner tous les couples (a, b) qui sont en relation avec $(0, 0)$ puis tous ceux en relation avec $(0, 1)$.

RÉPONSE. Un couple (a, b) est en relation avec $(0, 0)$ si et seulement si $a + 0 = 0 + b$, dont les couples en relation avec $(0, 0)$ sont précisément les couples de la forme (a, a) , $a \in \mathbb{N}$. De même on détermine les couples en relation avec $(0, 1)$ qui sont précisément ceux de la forme $(a, a + 1)$, $a \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que si $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$ et $(c, d) \mathcal{R} (c', d')$ alors :

6.1. $(a + c, b + d) \mathcal{R} (a' + c', b' + d')$;

RÉPONSE. On sait que $a + b' = a' + b$ et $c + d' = c' + d$. En sommant terme à terme on obtient $(a + b') + (c + d') = (a' + b) + (c' + d)$. Par associativité et commutativité de la somme des entiers naturels on obtient $(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d)$ ce qui prouve bien $(a + c, b + d) \mathcal{R} (a' + c', b' + d')$.

6.2. $(ac + bd, ad + bc) \mathcal{R} (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$.

RÉPONSE. Tout d'abord on fait une remarque générale : $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ ssi $x - y = x' - y'$. En effet par définition $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ ssi $x + y' = x' + y$ ce qui est équivalent à $x - y = x' - y'$. On va utiliser cette propriété caractéristique de la relation $\mathcal{R}$.

Supposons que $(a, b) \mathcal{R} (a', b')$ et $(c, d) \mathcal{R} (c', d')$, alors par la propriété caractéristique on a $a - b = a' - b'$ et $c - d = c' - d'$. En multipliant ces deux équations terme à terme on obtient : $(a - b)(c - d) = (a' - b')(c' - d')$ ce qui en développant et réarrangeant les termes donne : $ac + bd - (ad + bc) = a'c' + b'd' - (a'd' + b'c')$. Par la propriété caractéristique à nouveau c'est équivalent à : $(ac + bd, ad + bc) \mathcal{R} (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$.

Pour démontrer ce résultat qui ne parle que des entiers naturels, on a utilisé la soustraction, opération qui est définie sur les relatifs, mais pas sur les naturels. On peut faire mieux : voici une démonstration qui n'utilise que les propriétés et les opérations des entiers naturels.

On sait que $a + b' = a' + b$ et $c + d' = c' + d$. En multipliant la première égalité par c et d on a $ac + b'c = a'c + bc$ et $a'd + bd = ad + b'd$; en multipliant la deuxième par a' et b' on a $a'c + a'd' = a'c' + a'd$ et $b'c' + b'd = b'c + b'd'$. En sommant ces quatre égalités membre à membre on obtient $(ac + b'c) + (a'd + bd) + (a'c + a'd') + (b'c' + b'd) = (a'c + bc) + (ad + b'd) + (a'c' + a'd) + (b'c + b'd')$ et en réordonnant les termes $(ac + bd) + (a'd' + b'c') + (b'c + a'd + a'c + b'd) = (a'c' + b'd') + (ad + bc) + (a'c + b'd + a'd + b'c)$. En simplifiant les termes dans les troisièmes parenthèses, on obtient $(ac + bd) + (a'd' + b'c') = (a'c' + b'd') + (ad + bc)$ ce qui montre que $(ac + bd, ad + bc) \mathcal{R} (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$.