Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2018-2019

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Portail Descartes
Code du module : SPO1U3 Libellé du module : Langage Mathématique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

Pour toute application f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on note $A(f)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ suivant (appelé l'ensemble des *points fixes* de f) :

$$A(f) = \{x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x\}.$$

On considère la relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ suivante : $f \mathscr{R} g$ ssi $A(f) = A(g)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note i_n l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $i_n(x) = x^n$.

1.1. [1 pt] Montrer que $A(i_1) =]0,+\infty[$. En déduire toutes les applications g de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $i_1 \mathscr{R} g$.

Réponse. Pour $n = 1$ on a $i_n(x) = x^n = x^1 = x$ et donc tout $x \in]0,+\infty[$ est un point fixe de i_1 : $A(i_1) =]0,+\infty[$.
Soit maintenant g de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $i_1 \mathscr{R} g$. Cela se traduit par $A(g) =]0,+\infty[$. Il s'ensuit que tout $x \in]0,+\infty[$ est un point fixe de g, à savoir $g(x) = x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Cela montre que $g = i_1$ et i_1 est la seule application en relation avec i_1.

1.2. [1 pt] Montrer que $A(i_2) = A(i_n)$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

Réponse. Supposons maintenant $n \geq 2$ et cherchons les points fixes de i_n. Ce sont les points solutions de l'équation $x = i_n(x) = x^n$. L'équation est équivalente à $x(x^{n-1} - 1) = 0$ dont les solutions réelles sont 0, 1, et, si n est impair, -1. Parmi ces solutions, seulement $1 \in]0,+\infty[$ et donc, pour tout $n \geq 2$, $A(i_n) = \{1\}$, ce qui montre bien que $A(i_2) = A(i_n)$, pour tout entier $n \geqslant 2$.

2. [1,5 pt] Montrer que $\mathscr{R}$ définit une relation d'équivalence.

Réponse. Ceci est une conséquence immédiate du fait que la relation « être égaux » pour des sous-ensembles d'un ensemble est une relation d'équivalence. En effet, pour tout application f on a $f \mathscr{R} f$ car $A(f) = A(f)$ (*la relation est réflexive*) ; si $f \mathscr{R} g$ alors $g \mathscr{R} f$ car $A(f) = A(g)$ si et seulement si $A(g) = A(f)$ (*la relation est symétrique*) ; si $f \mathscr{R} g$ et $g \mathscr{R} h$ alors on a $A(f) = A(g)$ et $A(g) = A(h)$ et donc $A(f) = A(h)$ ce qui montre $f \mathscr{R} h$ (*la relation est transitive*).
Par ailleurs, on peut voir que cette relation est d'équivalence en remarquant qu'elle est déterminée par l'application $f \mapsto A(f)$ définie sur l'ensemble des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'ensembe des parties de $]0,+\infty[$.

3. [1 pt] Soit (P) l'assertion : $f \mathscr{R} g \Rightarrow g\big(A(f)\big) = A(f)$. Écrire sa contraposée et sa réciproque.

Réponse. Sa contraposée est : si $g\big(A(f)\big) \neq A(f)$ alors $f \not\mathscr{R} g$.
Sa réciproque est : $g\big(A(f)\big) = A(f) \Rightarrow f \mathscr{R} g$.

4. [1 pt] Montrer que (P) est vraie.

Réponse. Supposons $f \mathscr{R} g$. Cela signifie que $A(f) = A(g)$. Par définition de point fixe pour g, on a que pour tout $x \in A(f) = A(g)$, $g(x) = x$ et donc $g(x) \in A(f)$. Ceci montre $g\big(A(f)\big) \subset A(f)$. Supposons maintenant $x \in A(f)$. Puisque $x \in A(g)$ on doit avoir $x = g(x)$ et donc $x \in g\big(A(f)\big)$ ce qui montre l'autre inclusion.

5. [1 pt] Calculer $i_1\big(A(i_0)\big)$. En déduire que la réciproque de (P) est fausse.

Réponse. Puisque i_1 fixe tout point, on a $i_1\big(A(i_0)\big) = A(i_0)$. Cependant, on a vu que i_1 est la seule fonction dans sa classe d'équivalence et donc i_1 ne peut pas être en relation avec i_0. Ceci donne un contrexemple à la réciproque de (P) qui est donc fausse.

Exercice 2

1. [2 pt] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donner la définition mathématique de « f est *injective* », de « f est *surjective* » et de « f est *bijective* ». Pour une fonction f bijective, définir sa *fonction réciproque*.

   Réponse. L'application f est *injective* si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

   L'application f est *surjective* si pour tout $z \in \mathbb{R}$ il existe $x \in R$ tel que $f(x) = z$.

   L'application f est *bijective* si elle est injective et surjective.

   Si f est une application bijective, l'application réciproque de f est la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, notée f^{-1}, satisfaisant $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.

2. [1 pt] Soient f et g deux bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

   Réponse. On a vu en cours que la composition de deux applications injectives (respectivement surjectives) est une application injective (respectivement surjective), donc la composition de deux applications bijectives est une application bijective. Par ailleurs, on a aussi vu en cours que l'existence d'une application réciproque est équivalente à la bijectivité de l'application. Il suffit donc aussi de vérifier que l'application donnée est bien la réciproque de la composée, ce qu'on fait en exploitant l'associativité de la composition d'applications à plusieurs reprises : $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_{\mathbb{R}} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_{\mathbb{R}}$ et de même $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g \circ g^{-1}) \circ f = f^{-1} \circ Id_{\mathbb{R}} \circ f = f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application, et soient (X) et (Y) les assertions suivantes :

   (X) : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, (y = f(x) \text{ et } \forall z \in \mathbb{R}, z \neq x \Rightarrow y \neq f(z))$.

   (Y) : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y$.

3.1. [1 pt] Écrire la négation de (X).

   Réponse. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (y \neq f(x) \text{ ou } \exists z \in \mathbb{R}, (z \neq x \text{ et } y = f(z))$.

3.2. [1 pt] Parmi (X) et (Y) laquelle est équivalente à « f bijective » ? Justifier.

   Réponse. La condition équivalente à « f bijective » est (X). En effet, la première partie de l'assertion dit que f est surjctive, à savoir tout y admet une image réciproque x, et la deuxième que f est injective, à savoir l'image réciproque x est unique. L'assertion (Y) dit simplement que f est une application injective.

Exercice 3

Soit f la fonction de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1/x)$.

1. [2 pt] Montrer que f est bijective et donner sa fonction réciproque.

   Réponse. L'application f est la composition des applications $]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$, $x \mapsto 1/x$ et $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Ces deux applications sont bijectives, la première ayant elle-même comme réciproque et la deuxième ayant $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ comme réciproque. Comme on l'a vu dans l'exercice précédent on a que $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ est l'application définie par $f^{-1}(x) = 1/\exp(x)$.

2. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = f(\mathbb{N}^*)$ et $J = \{1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$.

2.1. [1 pt] Donner l'ensemble de leurs minorants, et de leurs majorants dans $\mathbb{R}$; justifier.

   Réponse. La fonction f est décroissante et on peut voir donc $I = f(\mathbb{N}^*)$ comme une suite décroissante. On a donc que $f(1) = 0$ est le maximum de la suite et, puisque $\lim_{n \to +\infty} f(n) = -\infty$ la suite n'est pas minorée. Ceci montre que l'ensemble des majorants de I est $[0, +\infty[$ tandis que celui des minorants est vide.

   On raisonne de la même façon pour la suite J : le premier terme de la suite, 1, est son plus grand élément tandis que $\lim_{n \to +\infty} 1/n = 0$ est son inf. On voit alors que l'ensemble des majorants de J est $[1, +\infty[$ et celui des minorants $] - \infty, 0]$.

2.2. [1 pt] Donner leurs bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$, si elles existent ; justifier.

   Réponse. Comme on l'a vu, I a une borne supérieure égale à 0 qui est aussi les plus grand élément de I, mais il n'a pas de borne inférieure ; la borne inférieure de J est 0 et la borne supérieure de J est 1 qui est aussi son maximum.

Exercice 4

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ que l'on considère ordonné par l'ordre usuel et $P = \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.

1. [0.5 pt] Donner la liste des éléments de P.

   Réponse. On a $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

2. [0,5 pt] Soit B une partie de A et $b \in A$; rappeler la définition mathématique de : « b est le maximum de B ».

   Réponse. L'élément $b \in A$ est le maximum de B si (i) $b \in B$ et (ii) pour tout $x \in B$ on a $x \leq b$.

3. [0.5 pt] Soit l'ensemble $G = \{(B, b) \in P \times A \mid b \in B \text{ et } \forall x \in B,\ x \leqslant b\}$. Donner la liste des éléments de G.

   Réponse. On a $G = \{(\{1\},1),(\{2\},2),(\{3\},3),(\{1,2\},2),(\{1,3\},3),(\{2,3\},3),(\{1,2,3\},3)\}$.

4. [1 pt] Soient $B \in P$ et b_1, $b_2 \in A$. Montrer que si $(B, b_1) \in G$ et $(B, b_2) \in G$ alors $b_1 = b_2$.

   Réponse. Ceci est clair d'après la question précédente et est une conséquence de l'unicité du maximum d'un ensemble. En effet, d'après la définition on doit avoir $b_1 \leq b_2$ car $b_1 \in B$ et b_2 est maximum et de même $b_1 \geq b_2$ car $b_2 \in B$ et b_1 est maximum, donc $b_1 = b_2$.

5. [1 pt] En déduire explicitement une application $f : P \to A$.

   Réponse. La question précédente montre que G est le graphe d'une application. Cette application $f : P \to A$ associe à chaque sous-ensemble non vide de A son maximum.

6. [1 pt] Calculer l'image $f(P)$ de P par f ; puis les images réciproques $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{3\})$.

   Réponse. En considérant G on a $f(P) = A$ car tout élément de A est l'image, par exemple, du singleton qui le contient. Tojours en considérant G on voit que $f^{-1}(\{1\}) = \{\{1\}\}$ et $f^{-1}(\{3\}) = \{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

7. [0,5 pt] Donner la définition de la relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$ associée à l'application f.

   Réponse. La relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$ sur P associée à f est définie de la façon suivante : pour tous $B, B' \in P$ on a $B\ \mathscr{R}_f\ B'$ si et seulemnt si $f(B) = f(B')$.

8. [1 pt] En déduire la classe d'équivalence de $\{3\}$ pour la relation $\mathscr{R}_f$ et l'exprimer à l'aide de f. Justifier.

   Réponse. On a vu en cours que la classe d'équivalence de $\{3\}$ est précisément $f^{-1}(\{f(\{3\})\}) = f^{-1}(\{3\})$. On a donc $[\{3\}] = \{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.