Université d'Aix-Marseille | Portail Descartes
2019-2020

Langage et raisonnements mathématiques

Partiel – 25 octobre 2019

Ni document, ni calculette, ni téléphone.

Note sur 20. Barème sur 22. On peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1

1. [2 pt] Exprimer en termes d'intervalles l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |4 - x^2| < 3x\}$.

Réponse. L'inégalité $|4 - x^2| < 3x$ équivaut à l'encadrement suivant :

$$-3x < 4 - x^2 < 3x, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x^2 - 3x - 4 < 0 < x^2 + 3x - 4.$$

Or chacun des polynômes $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$ et $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ prend ses valeurs négatives pour x compris entre ses deux racines :

$$x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ pour } x \in\,]-1, 4[, \qquad x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ pour } x \notin [-4, 1].$$

On a donc $A =]-1, 4[\setminus [-4, 1] =]1, 4[$.

Exercice 2

On considère les assertions suivantes :

$$P(n) : n \geqslant 5 \;\Rightarrow\; n^2 + 8 > 6n, \qquad Q : \forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

1. [2 pt] Écrire la réciproque et la contraposée de $P(n)$.

Réponse. La réciproque de $P(n)$ est $n^2 + 8 > 6n \;\Rightarrow\; n \geqslant 5$, et sa contraposée est $n^2 + 8 \leqslant 6n \;\Rightarrow\; n < 5$.

2. [1 pt] Expliciter la négation de Q.

Réponse. La négation de Q est $\exists n \in \mathbb{N}, \neg P(n)$, c'est-à-dire $\exists n \in \mathbb{N}, (n \geqslant 5 \wedge n^2 + 8 \leqslant 6n)$.
En langage courant : il existe un entier naturel n tel que n soit supérieur ou égal à 5 et n^2+8 soit inférieur ou égal à $6n$.

3. [2 pt] Montrer que l'assertion Q est vraie.

Réponse. L'inégalité $x^2 + 8 > 6x$ équivaut à $x^2 - 6x + 8 > 0$. Or les racines du polynôme $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ sont 2 et 4. L'inégalité $x^2 + 8 > 6x$ est donc vérifiée exactement par les éléments de l'ensemble $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$. Il s'ensuit que tout entier $n \geqslant 5$ vérifie l'inégalité $n^2 + 8 > 6n$; autrement dit, l'assertion Q est vraie.

On peut aussi démontrer $n^2 + 8 > 6n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, pour $n \geqslant 5$:
— C'est vrai pour $n = 5$, car on a $5^2 + 8 = 33 > 30 = 6 \times 5$.
— Si $n \geqslant 5$ et $n^2 + 8 > 6n$, alors on a $2n + 1 \geqslant 11$ et $(n + 1)^2 + 8 = n^2 + 8 + 2n + 1 > 6n + 11 > 6n + 6 = 6(n + 1)$.

Enfin, on peut remplacer la récurrence par une démonstration élémentaire par cas :
— Pour $n = 5$, on a $n^2 + 8 = 33 > 30 = 6n$.
— Pour $n \geqslant 6$, on a $n^2 + 8 > n^2 \geqslant 6n$.

Exercice 3

Dans cet exercice, A et B sont des ensembles quelconques.

1. [0,5 pt] Écrire la définition de $A \subset B$ de façon formelle.

   RÉPONSE. $\forall a \in A,\ a \in B$.

2. [0,5 pt] À quelle condition a-t-on $A \in \mathscr{P}(B)$?

   RÉPONSE. Lorsque $A \subset B$.

3. [2 pt] Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des éléments de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$? Lesquels sont des parties de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$?

$$\emptyset, \qquad \{0,1\}, \qquad [0,1], \qquad \{\emptyset\}.$$

   RÉPONSE. On a $\emptyset \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $\emptyset \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$, car l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.
   On a $\{0,1\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, car $0,1 \in \mathbb{R}$, mais $\{0,1\} \not\subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$, car $0,1 \notin \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
   De même, on a $[0,1] \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ par définition de l'intervalle $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, mais $[0,1] \not\subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
   Enfin, on a $\{\emptyset\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ car $\emptyset \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, mais $\{\emptyset\} \notin \mathscr{P}(\mathbb{R})$ car $\emptyset \notin \mathbb{R}$.

4. [2 pt] En utilisant vos réponses aux questions 1 et 2, démontrer l'assertion suivante :

$$A \subset B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B).$$

   RÉPONSE. Supposons que $A \subset B$, et soit X un élément de $\mathscr{P}(A)$.
   D'après les questions 2 et 1 appliquées à X et A, on a $X \subset A$, c'est-à-dire que tout élément de X est élément de A.
   Or par la première hypothèse, et en utilisant à nouveau la question 1, tout élément de A est élément de B.
   On en déduit que tout élément de X est élément de B.
   D'après les questions 1 et 2 appliquées à X et B, on a $X \subset B$, c'est-à-dire $X \in \mathscr{P}(B)$.
   Enfin, d'après la question 1 appliquée à $\mathscr{P}(A)$ et $\mathscr{P}(B)$, on obtient $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$. C.Q.F.D.

   On peut aussi déduire $X \subset B$ par transitivité de l'inclusion : on a $X \subset A \subset B$, donc $X \subset B$.

Exercice 4

On considère l'ensemble $E = \{0,1,2\}$ et les applications $f, g : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définies de la façon suivante :

$$f(X) = X \cup \{0,1\}, \qquad g(X) = X \cap \{1,2\}.$$

1. [1 pt] Écrire l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ explicitement.

   RÉPONSE. $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, E\}$.

2. [2 pt] Déterminer les ensembles suivants : $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$ et les images réciproques $f^{-1}(\{E\})$ et $g^{-1}(\{E\})$.

   RÉPONSE. Calculons explicitement les images des éléments de $\mathscr{P}(E)$ par les applications f et g :

$$f(\emptyset) = f(\{0\}) = f(\{1\}) = f(\{0,1\}) = \{0,1\}, \qquad f(\{2\}) = f(\{0,2\}) = f(\{1,2\}) = f(E) = E,$$

$$g(\emptyset) = g(\{0\}) = \emptyset, \qquad g(\{1\}) = g(\{0,1\}) = \{1\}, \qquad g(\{2\}) = g(\{0,2\}) = \{2\}, \qquad g(\{1,2\}) = g(E) = \{1,2\}.$$

   On en déduit :

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathscr{P}(E)) = \{\{0,1\}, E\} \qquad \mathrm{Im}(g) = g(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\},$$

$$f^{-1}(\{E\}) = \{\{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, E\}, \qquad g^{-1}(\{E\}) = \emptyset.$$

   En fait, on peut aussi écrire :

$$\mathrm{Im}(f) = \{Y \in \mathscr{P}(E) \mid \{0,1\} \subset Y\}, \qquad \mathrm{Im}(g) = \mathscr{P}(\{1,2\}), \qquad f^{-1}(\{E\}) = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid 2 \in X\}.$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 4 - x^2$.

1. [2 pt] Exprimer les ensembles $\mathrm{Im}(f)$ et $f([-1,2])$ en termes d'intervalles.

   Réponse. L'application f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,0] \cup [0,+\infty[) = f(]-\infty,0]) \cup f([0,+\infty[) =]-\infty,4] \cup]-\infty,4] =]-\infty,4],$$

$$f([-1,2]) = f([-1,0] \cup [0,2]) = f([-1,0]) \cup f([0,2]) = [3,4] \cup [0,4] = [0,4].$$

2. [2 pt] De même, expliciter les images réciproques par f des ensembles $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$.

   Réponse. Les racines du polynôme f sont -2 et 2, et il prend ses valeurs positives entre -2 et 2. On a donc :

$$f^{-1}(\{0\}) = \{-2, 2\}, \qquad f^{-1}(\mathbb{R}_+) = [-2, 2].$$

3. [1 pt] Donner une formule explicite pour la composée $g = f \circ f$.

   Réponse. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = f(f(x)) = f(4 - x^2) = 4 - (4 - x^2)^2 = -x^4 + 8x^2 - 12$.

4. [2 pt] Expliciter l'image réciproque de $\{0\}$ par g.

   Réponse. En utilisant le fait que $g = f \circ f$, on obtient $g^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(f^{-1}(\{0\})) = f^{-1}(\{-2,2\}) = \{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{6}\}$.

   On peut aussi chercher les racines du polynôme $-t^2 + 8t - 12$, avec $t = x^2$, puis en déduire les valeurs de x.