Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2019-2020

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1$^{\text{er}}$ semestre ☐ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Portail Descartes
Code du module : SPO1U03 Libellé du module : Langage Mathématique
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (Questions de cours [2 pt])

Soient $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle $\leqslant$, A une partie de $\mathbb{R}$ et m un nombre réel. Donner les définitions suivantes :

1. [0,5 pt] m est un majorant de A,

   Réponse. m est supérieur ou égal à tout élément de A : $\forall x \in A, x \leqslant m$,
   [On n'est pas obligé de donner la réponse en langage courant et en langage formel : une seule formulation suffit.]

2. [0,5 pt] m est la borne supérieure de A,

   Réponse. m est le plus petit majorant de A : $\forall x \in A, x \leqslant m$ et $\forall y \in \mathbb{R}, (\forall x \in A, x \leqslant y) \Rightarrow m \leqslant y$,

3. [0,5 pt] m est le plus grand élément de A,

   Réponse. m est un élément de A et un majorant de A : $m \in A$ et $\forall x \in A, x \leqslant m$,

4. [0,5 pt] m est un élément maximal de A.

   Réponse. m est le seul élément de A qui soit supérieur ou égal à m : $m \in A$ et $\forall x \in A, (m \leqslant x \Rightarrow m = x)$.

Exercice 2 (7 pt)

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et soit $f : E \to \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ l'application donnée par $f(n) = \{k \in E \mid k \text{ divise } n\}$. Soit $g : \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \to E$ l'application donnée par $g(A) = \operatorname{card}(A)$.

1. [2 pt] Calculer $f(4)$ et $f(6)$. Également, calculer $g(E)$ et $g(\{2, 4, 6\})$.

   Réponse. On a $f(4) = \{1, 2, 4\}$, $f(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, $g(E) = 6$ et $g(\{2, 4, 6\}) = 3$.

2. [2 pt] Donner l'ensemble image de f, puis justifier si elle est injective et/ou surjective.

   Réponse. On a $\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$.
   L'application $f : E \to \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est injective, car les images respectives des éléments de E par f sont distinctes, mais elle n'est pas surjective, car le singleton $\{2\} \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ n'a pas d'antécédent par f.

3. [2 pt] Préciser $\operatorname{Im}(g \circ f)$. Montrer que $g \circ f$ n'est ni injective ni surjective.

   Réponse. On a $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im}(f)) = \{1, 2, 3, 4\}$. L'application $g \circ f : E \to E$ n'est pas injective, car on a $(g \circ f)(2) = 2 = (g \circ f)(3)$, et elle n'est pas non plus surjective, car 5 n'a pas d'antécédent par $g \circ f$.

4. [1 pt] Déterminer $f^{-1}(\{\{1, 5\}\})$.

   Réponse. On a $f^{-1}(\{\{1, 5\}\}) = \{x \in E \mid f(x) = \{1, 5\}\} = \{5\}$.

Exercice 3 (9 pt)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_a(x) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. [2 pt] Montrer que f_a est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-ce que f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$? Justifier votre réponse.

   Réponse. Si $x \neq 0$, alors on a $f_a'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, donc l'application f_a est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, mais pas sur leur union $\mathbb{R}^*$, car on a $-1 < 1$ et $f(-1) = 0 \leqslant 2 = f(1)$.

2. [2 pt] Montrer que f_a est majorée sur $]-\infty, 0[$, et minorée sur $]0, +\infty[$. Préciser $\sup\limits_{x\in]-\infty,0[} f_a(x)$ et $\inf\limits_{x\in]0,+\infty[} f_a(x)$.

Réponse. Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$ d'où $f_a(x) = 1 + \frac{1}{x} < 1$. Ainsi, f_a est (strictement) majorée par 1 sur $]-\infty, 0[$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = 1$, donc 1 est le plus petit des majorants de f_a sur $]-\infty, 0[$.

De même, si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$ d'où $f_a(x) = 1 + \frac{1}{x} > 1$. Ainsi, f_a est (strictement) minorée par 1 sur $]0, +\infty[$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 1$, donc 1 est le plus grand des minorants de f_a sur $]0, +\infty[$.

Autrement dit, on a $\sup\limits_{x\in]-\infty,0[} f_a(x) = 1 = \inf\limits_{x\in]0,+\infty[} f_a(x)$.

3. [2 pt] Préciser $f_a(]-\infty, 0[)$ et $f_a(]0, +\infty[)$ en justifiant vos réponses.

Réponse. Comme f_a est continue et strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, et comme on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to0^-} f_a(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} f_a(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 1$, on obtient :

$$f_a(]-\infty, 0[) =]-\infty, 1[, \qquad f_a(]0, +\infty[) =]1, +\infty[.$$

4. [1 pt] En déduire l'ensemble image de f_a, puis déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que f_a soit surjective, en justifiant votre réponse.

Réponse. On a $\mathrm{Im}(f_a) = f_a(\mathbb{R}) =]-\infty, 1[\cup \{a\} \cup]1, +\infty[$. Il y a donc deux cas :
— si $a = 1$ alors $\mathrm{Im}(f_a) =]-\infty, 1[\cup \{1\} \cup]1, +\infty[= \mathbb{R}$;
— si $a \neq 1$ alors $a \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, d'où $\mathrm{Im}(f_a) =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\neq \mathbb{R}$.
Ainsi, f_a est surjective pour $a = 1$.

5. [2 pt] Montrer que f_1 est bijective, et préciser l'application réciproque f_1^{-1}.

Réponse. On sait déjà que l'application $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante, et donc injective, sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Comme les trois images $f_1(]-\infty, 0[)$, $f_1(\{1\})$, et $f_1(]0, +\infty[)$ sont disjointes, on en déduit facilement que f_1 est injective.

Ainsi, f_1 est bijective, et la formule de sa réciproque $y = f_1^{-1}(x)$ s'obtient en exprimant y à partir de x sachant que $x = f_1(y)$. Il y a deux cas :
— si $x = 1$, alors $y = 0$;
— si $x \neq 1$, alors $x = 1 + \frac{1}{y}$, c'est-à-dire $\frac{1}{y} = x - 1$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{x-1}$.

Exercice 4 (4 pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos(x)$.

1. [2 pt] Préciser les classes d'équivalence de 0 et $\frac{\pi}{3}$ par rapport à la relation d'équivalence $\mathscr{R}_f$ associée à f.

Réponse. On a $\cos 0 = 1$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc les classes d'équivalence de 0 et $\frac{\pi}{3}$ par rapport à $\mathscr{R}_f$ sont :

$$[0] = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 1\} = 2\pi\mathbb{R}, \qquad \left[\tfrac{\pi}{3}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = \tfrac{1}{2}\right\} = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{R}.$$

2. [2 pt] Justifier précisément qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{R}/\mathscr{R}_f \to [-1, 1]$.

Réponse. Par construction du quotient $\mathbb{R}/\mathscr{R}_f$, l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induit une injection $\tilde{f} : \mathbb{R}/\mathscr{R}_f \to \mathbb{R}$, définie par $\tilde{f}([x]) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = \mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$, et en restreignant l'ensemble d'arrivée, on obtient une bijection $\varphi : \mathbb{R}/\mathscr{R}_f \to [-1, 1]$.

Exercice 5 (4 pt)

Soient $E = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $F = \{5^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. [2 pt] Montrer que la relation $\mathscr{R}$ sur E

$$x \mathrel{\mathscr{R}} y \quad \text{ssi} \quad x \text{ divise } y$$

est une relation d'ordre sur E.

Réponse. On sait que la divisibilité définit une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ [ou sur $\mathbb{N}$]. Par restriction, on obtient une relation d'ordre sur $E \subset \mathbb{N}^*$.

[On pouvait aussi décrire explicitement la relation $\mathscr{R}$:

$$3^p \mathrel{\mathscr{R}} 3^q \quad \text{ssi} \quad p \leqslant q.$$

Ainsi, la relation $\mathscr{R}$ sur E correspond à l'*ordre canonique* $\leqslant$ sur $\mathbb{N}$.]

2. [1 pt] Montrer que cette relation est une relation d'ordre total sur E.

Réponse. Si $p, q \in \mathbb{N}$, alors on a $p \leqslant q$ ou $q \leqslant p$, donc 3^p divise 3^q ou 3^q divise 3^p.
[Comme l'ordre canonique est total sur $\mathbb{N}$, l'argument précédent montre aussi que $\mathscr{R}$ est un ordre total sur E.]

3. [1 pt] Montrer que la divisibilité définit une relation d'ordre partiel (c'est-à-dire non total) sur $E \cup F$. (On admettra que c'est une relation d'ordre sur $E \cup F$.)

Réponse. La divisibilité ne définit pas un ordre total sur $E \cup F$: on a $3, 5 \in E \cup F$, mais 3 et 5 sont incomparables pour la divisibilité.