Planche 5
Relations d'équivalence

Soit E un ensemble; une relation $\sim$ sur E est dite *relation d'équivalence* si elle est :

réflexive : $\forall x \in E, x \sim x$

symétrique : $\forall x \in E, \forall y \in E, \text{ si } x \sim y \text{ alors } y \sim x$

transitive : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \text{ si } x \sim y \text{ et } y \sim z \text{ alors } x \sim z.$

1 Exemples simples de relations d'équivalence

Précisez si les relations suivantes sont des relations d'équivalence. Si les relations ne le sont pas, précisez laquelle (ou lesquelles) des trois propriétés de définition n'est pas remplie.

EXERCICE 1 (Relations sur $E = \mathbb{R}$)

1. $x \sim y$ ssi $|x - y| < 1$.
2. $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$.
3. $x \sim y$ ssi $x + y \in \mathbb{Q}$.

EXERCICE 2 (Relations sur $E = \mathbb{Z}$.)

1. $x \sim y$ ssi $\frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z}$.
2. $x \sim y$ ssi $x + y = 2$.
3. $x \sim y$ ssi $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z} x^p = y^q$.

EXERCICE 3 (Relations sur l'ensemble E des droites du plan)

1. $d_1 \sim d_2$ ssi $d_1 \parallel d_2$.
2. $d_1 \sim d_2$ ssi $d_1 \perp d_2$.

EXERCICE 4 (Relations sur l'ensemble E des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

1. $f \sim g$ ssi l'ensemble $E_{f,g} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ est fini.
2. $f \sim g$ ssi l'ensemble $E_{f,g}$ est vide ou a un seul élément.

2 Construction de relations d'équivalence à partir des applications ou d'autres relations

Il est parfois possible de construire une relation d'équivalence utile à partir d'une application ou à partir d'une autre relation (d'équivalence ou non). Les exercices de cette section proposent plusieurs situations de ce type.

EXERCICE 5

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une application. On définit le relation $\sim_f$ sur E comme suit :

$$x \sim_f y \text{ ssi } f(x) = f(y).$$

Prouvez que $\sim$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 6

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et la relation $\sim$ sur E dont l'ensemble suivant donne la liste de tous les couples (x, y) tels que $x \sim y$:

$$G_{\sim} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (c, c), (c, a), (c, b), (d, d)\}.$$

1. Laquelle (ou lesquelles) des trois propriétés définissant une relation d'équivalence n'est pas respectée par $\sim$?
2. Rajouter à l'ensemble $G_{\sim}$ un couple $(x, y) \in E \times E$ de sorte que la nouvelle relation ainsi formée soit une relation d'équivalence.

EXERCICE 7

Soit E un ensemble, et $\sim_1, \sim_2$, deux relations d'équivalence sur E . On définit la réunion des relations $\sim_1$ et $\sim_2$ comme étant la relation $\mathcal{U}$ sur E :

$$x \mathcal{U} y \text{ ssi } (x \sim_1 y \text{ ou } x \sim_2 y),$$

et l'intersection des relations $\sim_1$ et $\sim_2$ comme la relation $\mathcal{S}$ sur E :

$$x \mathcal{S} y \text{ ssi } (x \sim_1 y \text{ et } x \sim_2 y).$$

1. Est-ce que $\mathcal{U}$ est une relation d'équivalence ?
2. Même question pour $\mathcal{S}$.

3 Classe d'équivalence d'un élément

Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E . Pour tout élément $x \in E$, le sous-ensemble

$$[x] = \{y \in E : x \sim y\}$$

de E s'appelle la *classe d'équivalence* de x dans E . On a les propriétés :

- $\forall x \in E, x \in [x]$,
- $\forall x \in E, \forall y \in E, x \sim y \text{ ssi } [x] = [y]$,
- $\forall x \in E, \forall y \in E, \text{non}(x \sim y) \text{ ssi } [x] \cap [y] = \emptyset$.

Les exercices suivants (8-12) sont des cas particuliers de la construction d'une relation d'équivalence décrite à l'exercice 5.

EXERCICE 8

Soit la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ ssi } x = x'.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la relation $\sim$ soit de la forme $\sim_f$.
2. Déterminer $[(x_0, y_0)]$, la classe d'équivalence d'un élément (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 9

Soit la relation $\sim$ sur $\mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes) définie par :

$$z \sim z' \text{ ssi } |z| = |z'|.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la relation $\sim$ soit de la forme $\sim_f$.
2. Déterminer $[z_0]$, la classe d'équivalence d'un élément z_0 de $\mathbb{C}$.

EXERCICE 10

Soit la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \sim y \text{ ssi } x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la relation $\sim$ soit de la forme $\sim_f$.
2. Déterminer $[1]$, la classe d'équivalence du nombre réel 1.
3. Trouvez tous les $a \in \mathbb{R}$ dont la classe d'équivalence $[a]$ est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.

EXERCICE 11

Soit la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \sim y \text{ ssi } xe^y = ye^x.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la relation $\sim$ soit de la forme $\sim_f$.
2. Déterminer $[1]$, la classe d'équivalence de 1, et $[-1]$, la classe d'équivalence de -1 .
3. Trouvez tous les $x \in \mathbb{R}$ dont la classe d'équivalence est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.

EXERCICE 12

Soit E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et la relation $\sim$ sur E définie par :

$$f \sim g \text{ ssi } \exists a, b > 0, af(x) \leq g(x) \leq bf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Prouvez que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Trouver toutes les constantes s telles que $s + \arctan \in [1]$, la classe d'équivalence de l'application

$$1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 1(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4 Ensemble quotient et application induite

Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E . L'ensemble

$$E/\sim = \{[x] : x \in E\}$$

s'appelle l'*ensemble quotient* de E par $\sim$.

Soit F un ensemble. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *compatible* avec $\sim$ si

$$\forall x \in E, \forall y \in E \quad x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Si $f : E \rightarrow F$ est compatible avec $\sim$, on définit $\bar{f}$, l'*application induite* par f sur $E/\sim$ comme étant l'application :

$$\bar{f} : E/\sim \rightarrow F, \quad \bar{f}([x]) = f(x), \quad \forall x \in E.$$

EXERCICE 13

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et $\sim_f$ la relation d'équivalence définie à l'exercice 5.

1. L'application f est compatible avec $\sim_f$.
2. Le quotient de f par $\sim_f$ met l'ensemble $E/\sim_f$ en bijection avec $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\}$.

EXERCICE 14

Soit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \sim y \text{ ssi } \sin(x) = \sin(y).$$

1. Prouvez que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\sim$ est en bijection avec l'ensemble $[-1, 1]$.
2. Parmi les applications suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (ou sont) compatibles avec $\sim$:

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sin^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ?$$

EXERCICE 15

Soit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \sim y \text{ ssi } x - y \in \mathbb{Z}.$$

1. Prouvez que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\sim$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{U}$ de tous les nombres complexes de module 1.
2. Est-ce que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ est compatible avec $\sim$? Et l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(2\pi x)$?

EXERCICE 16

Soit E l'ensemble des droites du plan. On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur E par :

$$d_1 \sim d_2 \text{ ssi } d_1 \parallel d_2.$$

1. Prouvez que l'ensemble quotient $E/\sim$ est en bijection avec l'ensemble des droites passant par l'origine.
2. Prouvez aussi que l'ensemble $E/\sim$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

5 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble non-vidé. Une partition de E est un sous-ensemble P de $\mathcal{P}(E)$, avec les propriétés suivantes :

- i. $\emptyset \notin P$
- ii. $\forall A, B \in P, A = B$ ou $A \cap B = \emptyset$
- iii. $\bigcup_{A \in P} A = E$.

En d'autres mots, une partition de E est un ensemble de sous-ensembles de E de telle sorte qu'aucun de ces sous-ensembles ne soit vide, qu'ils soient deux à deux disjointes, et que leur réunion soit égale à E . La propriété suivante fait le lien entre partitions d'un ensemble et relations d'équivalence.

EXERCICE 17

Soit P une partition de E .

Alors la relation $x \sim y$ ssi $(\exists A \in P, x, y \in A)$ est une relation d'équivalence, dont P est l'ensemble quotient.

EXERCICE 18

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Combien de partitions de E existe-t-il ?

EXERCICE 19

Soit a, b, c trois nombre réels. À quelles conditions sur a, b, c , les trois ensembles $] -\infty, b],]0, a[$ et $[c, +\infty[$ forment ils une partition de $\mathbb{R}$?

EXERCICE 20

Soit E un ensemble non-vidé. Peut-on trouver $A, B \subset E$ tels que $A, A \cap B$ et B soit une partition de E ?

6 Un cas particulier : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans les exercices qui suivent, n est un nombre naturel plus grand ou égal à 2, fixé une fois pour toutes.

EXERCICE 21

Soit la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ définie comme :

$$x \sim y \text{ ssi } \frac{x - y}{n} \in \mathbb{Z}.$$

1. Prouvez que $x \sim y$ si et seulement si x et y ont le même reste à la division euclidienne par n (on dit aussi que x et y sont égaux modulo n).
2. Démontrez que $\sim$ est une relation d'équivalence, et que l'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}$ sont compatibles avec $\sim$.

EXERCICE 22

Notons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $\sim$.

Combien d'éléments possède l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

EXERCICE 23

Dans cet exercice (et dans cet exercice seulement) on pose $n = 12$.

1. Donner la liste de tous les couples $(\lambda, \eta) \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 11\}^2$ tels que

$$[\lambda] \times [\eta] = [0].$$

2. Résoudre l'équation

$$[x]^2 - [5] \times [x] + [6] = [0]$$

dans $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 11\}$.

7 Exercices complémentaires

EXERCICE 24 (Relations sur l'ensemble $E = \mathcal{P}(S)$ des parties d'un ensemble non-vidé S)

1. On fixe $K \subset S, K \neq \emptyset$. $A \sim B$ ssi $A \cap K = B \cap K$.
2. $A \sim B$ ssi $\exists K \subset S, K \neq \emptyset, A \cap K = B \cap K$.

EXERCICE 25

Soit E, F et G trois ensembles, $\sim$ une relation d'équivalence sur E , $f : F \rightarrow E$ une application de F dans E , et $g : E \rightarrow G$ une application de E dans G .

On définit la relation $\mathcal{S}$ de F dans F :

$$x \mathcal{S} y \text{ ssi } f(x) \sim f(y),$$

et la relation $\mathcal{U}$ de G dans G :

$$x \mathcal{U} y \text{ ssi } (\exists u, v \in E \quad u \sim v, \quad x = g(u), \quad y = g(v)).$$

1. Est-ce que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence ?
2. Même question pour $\mathcal{U}$.

EXERCICE 26

Soit la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \sim y \text{ ssi } \sin^2(x) + \cos^2(y) = 1.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la relation $\sim$ soit de la forme $\sim_f$.
2. Déterminer $[0]$, la classe d'équivalence du nombre réel 0.

EXERCICE 27

Soit $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. On définit une relation $\sim$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par :

$$A \sim B \text{ ssi } A \cup [0, 1] = B \cup [0, 1].$$

1. Trouvez une application $f : E \rightarrow E$ telle que la relation $\sim$ soit de la forme $\sim_f$.
2. Déterminer $[\{0\}]$, la classe d'équivalence de l'élément $\{0\}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 28

Soit les relations d'équivalence des exercices 8-12.

1. Déterminer un ensemble qui peut être identifié avec le quotient de la relation.

Les deux exercices suivants donnent les constructions de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$ (exercice (29)) et de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ (exercice (30)).

EXERCICE 29

Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit sur E deux opérations : une addition

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \quad \forall (a, b), (c, d) \in E,$$

et une multiplication

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac + bd, ad + bc) \quad \forall (a, b), (c, d) \in E.$$

On considère la relation $\sim$ de E dans E par :

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ ssi } a + d = b + c.$$

1. Prouvez que $\sim$ est une relation d'équivalence, et que l'ensemble quotient $E/\sim$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers.
2. Prouvez que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont compatibles avec $\sim$, et que leur quotients sont les opérations d'addition et multiplication (classiques) sur $\mathbb{Z}$.

EXERCICE 30

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit sur E deux opérations : une addition

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ad + bc, bd) \quad \forall (a, b), (c, d) \in E,$$

et une multiplication

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd) \quad \forall (a, b), (c, d) \in E.$$

On considère la relation d'équivalence $\sim$ de E dans E par :

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ ssi } ad - bc = 0.$$

1. Prouvez que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence, et que l'ensemble quotient $E/\sim$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
2. Prouvez que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont compatibles avec $\sim$, et que leurs quotients sont les opérations d'addition et de multiplication (classiques) sur $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 31

Soit n un nombre naturel.

1. Combien de solutions $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ a l'équation

$$[2] \times [x] = [0] ?$$

2. Même question pour l'équation

$$[2] \times [x] = [1].$$

(les réponses dépendent de la parité de n).

EXERCICE 32

(Théorème de Bézout). Soit l'équation

$$[a] \times [x] = [1],$$

avec $a \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$.

Prouvez que cette équation admet une solution $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ si et seulement si a et n sont premiers entre eux.