# L1 Maths et Info
# Mathématiques discrètes 1
# Partiel du 5 novembre 2007

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

**Exercice 1** Rappeler les définitions de :

i) partie d'un ensemble ;

*Réponse.* Une *partie* d'un ensemble $X$ est un ensemble $Y$ tel que $Y \subset X$, c'est-à-dire telle que $\forall y \in Y, y \in X$.

ii) fonction injective, surjective et bijective ;

*Réponse.* Une fonction $f : X \to Y$ est *injective* si tout élément de $Y$ a au plus un antécédent par $f$. Autrement dit :

$$\forall x, x' \in X, \text{ si } f(x) = f(x') \text{ alors } x = x'.$$

Elle est *surjective* si tout élément de $Y$ a au moins un antécédent par $f$. Autrement dit :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, \ y = f(x).$$

Elle est *bijective* si elle injective et surjective. Autrement dit, tout élément de $Y$ a exactement un antécédent par $f$.

**Exercice 2** Dans chacun des énoncés suivants, préciser le type de l'énoncé (définition ou proposition), les hypothèses et conclusions s'il s'agit d'une proposition, l'objet défini s'il s'agit d'une définition ; puis donner le type de chaque symbole utilisé dans l'énoncé.

i) Si $X \subset \mathbb{N}$ et $X \neq \emptyset$, alors il existe $n \in X$ tel que $n \geq p$ pour tout $p \in X$.

*Réponse.* L'énoncé est une proposition. Les hypothèses sont « $X \subset \mathbb{N}$ » et « $X \neq \emptyset$ ». La conclusion est « il existe … ».
Types des symboles : $\mathbb{N}, X$ : ensembles d'entiers ; $n, p$ : entiers ; $\subset$ : relation entre ensembles d'entiers ; $\neq$ : relation entre ensembles d'entiers ; $\in$ : relation entre entiers et ensembles d'entiers ; $\geq$ : relation entre entiers.

Remarque

> Cet énoncé est faux : il dit que tout ensemble d'entiers naturels a un plus grand élément. Il y a un énoncé similaire qui est vrai : tout ensemble d'entiers naturels a un plus petit élément (que faut-il changer ci-dessus pour obtenir cet énoncé ?).

ii) Si $f : X \to Y$ est une bijection, alors il existe $g : Y \to X$ telle que $g(f(x)) = x$ pour tout $x$ dans $X$, et $f(g(y)) = y$ pour tout $y$ dans $Y$.

*Réponse.* L'énoncé est une proposition ; l'hypothèse est que $f : X \to Y$ est une bijection, la conclusion qu'il existe $g$…
$X, Y$ : ensembles ; $f$ : fonction de $X$ vers $Y$ ; $g$ : fonction de $Y$ vers $X$ ; $x$ : élément de $X$ ; $y$ : élément de $Y$ ; $=$ : relation entre éléments de $X$ ou entre éléments de $Y$.

iii) Si $z \subset \mathbb{N}$ et $x \in \mathcal{P}(z)$ alors pour tout $y \in x$, $y \in z$.

*Réponse.* L'énoncé est une proposition. Les hypothèses sont « $z \subset \mathbb{N}$ » et « $x \in \mathcal{P}(z)$ ». La conclusion est « pour tout … ».
Types des symboles : $\mathbb{N}, z, x$ : ensembles d'entiers ; $y$ : entier ; $\mathcal{P}(z)$ : ensemble d'ensembles d'entiers.

iv) Une *partition* de $X$ est un ensemble $P$ tel que pour tout $A, B \in P$, si $A \neq B$ alors $A \cap B = \emptyset$ et pour tout $x \in X$ il existe un $A \in P$ tel que $x \in A$.

*Réponse.* L'énoncé est une définition de la notion de partition. Dans cette définition, la partition est $P$. Types des symboles : $X, A, B, \emptyset$ : ensembles ; $P$ : ensemble d'ensembles ; $x$ : élément de $X$ ; $\cap$ : opération sur les ensembles ; $\neq, =$ : relations entre ensembles ; $\in$ : relation entre éléments et ensembles (ou entre entre ensembles et ensembles d'ensembles).

Remarque

> Cette définition n'est pas tout à fait correcte ; il faut préciser que $P$ est un ensemble de *parties* de $X$ ; dans ce cas on les lettres $A$ et $B$ dénotent des parties de $X$.

**Exercice 3** Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer si elle est injective, surjective, bijective. Si la fonction n'est pas injective, on dira pourquoi, et de même si elle n'est pas surjective. Si la fonction est bijective on donnera son inverse.

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ ;

*Réponse.* $f$ est injective, mais pas surjective : 1 n'a aucun antécédent.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ ;

*Réponse.* $f$ est bijective : sa fonction inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f^{-1}(x) = x/2$.

iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$ ;

*Réponse.* $f$ est injective, mais pas surjective : 2 n'a aucun antécédent.

iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ ;

*Réponse.* $f$ n'est ni injective, ni surjective : 1 a deux antécédents, et 2 n'en a aucun.

v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ ;

*Réponse.* $f$ est surjective, mais pas injective : 1 a deux antécédents.

vi) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = x + y$ ;

*Réponse.* $f$ est surjective, mais pas injective : 1 a deux antécédents, les couples $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

vii) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, $f(x, y) = (x + y, x)$ ;

*Réponse.* $f$ est injective, mais pas surjective : $(0, 1)$ n'a aucun antécédent (et plus généralement $(n, p)$ n'a pas d'antécédent dès que $n < p$).

viii) $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ ;

*Réponse.* $f$ est bijective : sa fonction inverse $f^{-1} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ est $f$ elle-même.

**Exercice 4** Soit $S$ et $D$ deux ensembles d'entiers naturels. Les éléments de $S$ seront appelés les entiers *secrets* et ceux de $D$ seront appelés les entiers *discrets*. Écrire formellement les énoncés ci-dessous en suivant le modèle : « tout entier secret est discret » devient « $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \in S$ alors $n \in D$ ».

i) aucun entier discret n'est secret ;

*Réponse.* $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \in D$ alors $n \notin S$.
Variante : $\forall n \in D, n \notin S$.

ii) il y a des entiers discrets qui sont secrets ;

*Réponse.* $\exists n \in \mathbb{N}, n \in D$ et $n \in S$.
Variante : $\exists n \in D, n \in S$.

iii) il y a au plus un entier discret qui est secret ;

*Réponse.* $\forall n, p \in \mathbb{N}$, si $n, p \in D$ et $n, p \in S$ alors $n = p$.
Variante : $\forall n, p \in D$, si $n, p \in S$ alors $n = p$.

iv) il y a un unique entier secret qui n'est pas discret (on évitera d'utiliser la notation $\exists!$) ;

*Réponse.* $\exists n \in \mathbb{N}, n \in S$ et $n \notin D$ et $\forall p \in \mathbb{N},$ si $p \in S$ et $p \notin D$ alors $p = n$.
Variante : $\exists n \in S, n \notin D$ et $\forall p \in S,$ si $p \notin D$ alors $p = n$.

v) pour tout entier secret, il y a un entier discret qui lui est supérieur ;

*Réponse.* $\forall n \in \mathbb{N},$ si $n \in S$ alors $\exists p \in \mathbb{N}, p \in D$ et $p \geq n$.
Variante : $\forall n \in S, \ \exists p \in D, p \geq n$.

vi) il y a un entier discret qui majore tous les entiers secrets ;

*Réponse.* $\exists n \in \mathbb{N}, n \in D$ et $\forall p \in \mathbb{N},$ si $p \in S$ alors $n \geq p$.
Variante : $\exists n \in D, \ \forall p \in S, n \geq p$.

vii) si deux entiers distincts sont discrets alors au moins l'un des deux est secret ;

*Réponse.* $\forall n, p \in \mathbb{N},$ si $n, p \in D$ et $n \neq p$ alors $n \in S$ ou $p \in S$.
Variante : $\forall n, p \in D,$ si $n \neq p$ alors $n \in S$ ou $p \in S$.

viii) un entier est secret si il est discret et toutes ses puissances sont discrètes.

*Réponse.* $\forall n \in \mathbb{N},$ si $n \in D$ et $\forall p \in \mathbb{N}, n^p \in D$ alors $n \in S$.
Variante : $\forall n \in D,$ si $\forall p \in \mathbb{N}, n^p \in D$ alors $n \in S$.