L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Examen du 5 janvier 2009

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 30 minutes par exo,

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ une fonction. Sans utiliser les notations « $\exists!$ », « $\mathrm{Im}(f)$ », « $f(A)$ » et « $f^{-1}(A)$ » avec $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, écrire en langage formel les assertions suivantes :

i) f est constante ;

ii) f est injective ;

iii) f n'est pas injective ;

iv) f est croissante ;

v) f n'est pas décroissante ;

vi) f est majorée ;

vii) f est non bornée ;

viii) les antécédents de 1 par f sont négatifs ou nuls ;

ix) il existe au moins un entier relatif dont l'image par f est strictement positive ;

x) il y a au plus un entier relatif dont l'image par f est strictement positive.

Exercice 2 Soit n un entier naturel. On rappelle que la notation $[1, n]$ désigne l'ensemble des *entiers* compris entre 1 et n et que la notation $|E| = n$ signifie que E est un ensemble fini de cardinal n.

i) Que vaut le cardinal de $[1, 2n]$?

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$.

ii) Donner la définition en français du coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

iii) Donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{p}$ en fonction de n et p.

iv) Quelle relation lie les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{n-p}$? Justifier votre réponse.

v) Soient A, B, deux parties de $[1, 2n]$ telles que

$$|A| = |B| = n \text{ et } A \cup B = [1, 2n].$$

Calculer $|A \cap B|$. En déduire que $\{A, B\}$ est une partition de $[1, 2n]$ en deux classes. Exprimer B en fonction de $[1, 2n]$ et de A au moyen d'opérations ensemblistes.

vi) Combien y-a-t-il de partitions différentes de $[1, 2n]$ en deux classes A, B telles que $|A| = |B| = n$?

vii) Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n. Calculer le nombre de parties A de $[1, 2n]$ telles que : $|A| = n$ et A contient exactement k éléments inférieurs ou égaux à n.

viii) En déduire que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

puis la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

ix) Par un raisonnement analogue, montrer que pour tout couple (p, q) d'entiers naturels tels que $p + q = 2n$ et $p \leq n$, on a

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Tourner la page

Exercice 3 Soit X un ensemble quelconque et $f : X \to X$ une application quelconque.

i) Montrer que si f est injective alors il existe une application g telle que $g \circ f = \mathrm{Id}$.

ii) Montrer que si f est surjective alors $f \circ f$ est surjective.

iii) On suppose que f vérifie :

$$f \circ f \circ f = f.$$

Montrer que si f est injective alors f est bijective ; quelle est alors sa fonction réciproque ?

iv) Donner un exemple d'application qui vérifie $f \circ f \circ f = f$ mais qui n'est pas injective.

Indication : On pourra chercher un exemple dans le cas où X est un ensemble fini ayant peu d'éléments.