L1 Maths et Info
Mathématiques discrètes 1
Examen du 11 juin 2009

Durée : 2h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 30 minutes par exo.

Soit n un entier naturel. On rappelle que la notation $[1, n]$ désigne l'ensemble des *entiers* compris entre 1 et n.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. Sans utiliser les notations « $\exists!$ », « $\mathrm{Im}(f)$ », « $f(A)$ » et « $f^{-1}(A)$ » avec $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, écrire en langage formel les assertions suivantes :

i) f a un point fixe (un entier n tel que $f(n) = n$) ;

ii) f a exactement un point fixe ;

iii) f n'a pas de point fixe ;

iv) f a un point fixe pair ;

v) f a exactement un point fixe pair ;

vi) f n'a pas de point fixe pair ;

vii) tout point fixe de f est pair ;

viii) les points fixes de f sont majorés ;

ix) les points fixes pairs de f sont majorés ;

x) tout entier assez grand est point fixe de f.

Exercice 2

i) Donner tous les éléments de l'ensemble $[1, 3] \times [1, 2]$.

ii) Définir une bijection de $[1, 3] \times [1, 2]$ dans $[1, 6]$.

iii) Existe-il une bijection de $[1, 21] \times [1, 37]$ dans $[1, 767]$ (justifier sa réponse) ?

iv) Soit n un entier. Pour quel(s) entier(s) p existe-il une bijection de $\mathcal{P}([1, n])$ dans $[1, p]$? Construire une telle bijection pour $n = 4$.

Exercice 3

i) Rappeler la formule de récurrence sur les coefficients binomiaux.

ii) Écrire les 7 premières lignes du triangle de Pascal.

iii) Calculer la somme des coefficients de chacune des 7 colonnes du triangle, puis calculer la 8ème ligne du triangle.

iv) Soit a un entier ; montrer par récurrence sur n que :

$$\sum_{k=a}^{a+n} \binom{k}{a} = \binom{a+n+1}{a+1}$$

On se propose maintenant de démontrer ce même résultat par une méthode combinatoire. On rappelle que si p est un entier et X un ensemble alors $\mathcal{P}_p(X)$ est l'ensemble des parties de X contenant exactement p éléments.

v) Soient a et k deux entiers ; quel est le cardinal de $\mathcal{P}_a([1, k])$?

vi) Soient a, k et p trois entiers tels que $a \leq k \leq p$. On note $\mathcal{P}_{a+1}^{k+1}([1, p+1])$ l'ensemble des parties de $[1, p+1]$ à $a+1$ éléments dont le plus grand élément est $k+1$. Écrire la définition formelle de $\mathcal{P}_{a+1}^{k+1}([1, p+1])$ en complétant le modèle : $\mathcal{P}_{a+1}^{k+1}([1, p+1]) = \{A \subset [1, p+1] \text{ tel que } \ldots\}$.

vii) Montrer que $\mathcal{P}_{a+1}^{k+1}([1, p+1])$ a le même nombre d'éléments que $\mathcal{P}_a([1, k])$.

viii) Montrer que si $k \neq k'$ alors $\mathcal{P}_{a+1}^{k+1}([1, p+1]) \cap \mathcal{P}_{a+1}^{k'+1}([1, p+1]) = \emptyset$ et que la réunion des $\mathcal{P}_{a+1}^{k+1}([1, p+1])$ pour k allant de a jusqu'à p est égale à $\mathcal{P}_{a+1}([1, p+1])$. En déduire le résultat.