L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
Examen du 9 janvier 2007

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir en moyenne 30 minutes par exo, ne pas passer plus de 40 minutes sur le même exo.

Exercice 1 Rappeler la définition d'un anneau de Boole. En supposant uniquement que A est un anneau de Boole, comment démontre-t-on que l'on a $x + x = 0$ pour tout élément de A ?

Exercice 2 Soit T un treillis muni d'un plus grand élément $\top$ et d'un plus petit élément $\bot$.

i) Montrer que pour tous éléments x et y de T on a :

$$x \wedge y = \top \text{ ssi } x = y = \top$$

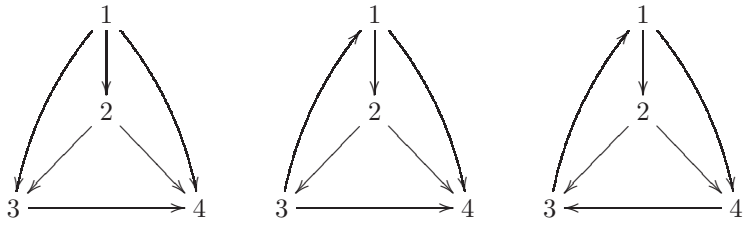
ii) Que peut-on dire de deux éléments x et y de T vérifiant $x \wedge y = x \vee y$ (justifier sa réponse) ?

Exercice 3

i) Existe-il un graphe (orienté) à 4 sommets dont les degrés seraient respectivement 1, 2, 4 et 8 ? On justifiera sa réponse.

ii) Même question mais cette fois avec des degrés émergents : existe-il un graphe (orienté) à 4 sommets dont les degrés *émergents* seraient respectivement 1, 2, 4 et 8 ?

Exercice 4 Pour chacun des graphes suivants, donner sa matrice d'adjacence puis calculer le graphe et la matrice d'adjacence des chemins de longueur 2 et 3 :



Exercice 5 On considère les mots sur l'alphabet à deux lettres a et b.

i) Construire un automate déterministe reconnaissant le langage L défini par l'expression régulière $(a+b)^*aba(a+b)^*$ (L est le langage des mots contenant aba).

ii) Construire un automate déterministe pour le langage L' défini par l'expression régulière $(a+b)^*aabb(a+b)^*$ (L' est le langage des mots contenant $aabb$).

iii) Construire une expression régulière puis un automate déterministe pour le langage $L \cap L'$ des mots contenant à la fois aba et $aabb$.

iv) Construire un automate déterministe, puis une expression régulière, pour le langage complémentaire L^c des mots ne contenant pas aba.