

L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
Examen du 19 décembre 2007
Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum.

Exercice 1 Donner les tableaux de vérité puis les formes normales canoniques disjonctives et conjonctives des fonctions booléennes suivantes.

- i) $f_1(b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_1 = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- ii) $f_2(b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} 1 & \text{si exactement l'un de } b_1, b_2 \text{ ou } b_3 \text{ est égal à } 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- iii) $f_3(b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_1 = b_2 = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- iv) $f_4(b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} 1 & \text{si exactement deux parmi } b_1, b_2 \text{ ou } b_3 \text{ sont égaux à } 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 2 Soit G le graphe défini par : $S_G = \{1, 2, 3, 4\}$ est l'ensemble des sommets ; $A_G = \{a, b, c, d, e\}$ est l'ensemble des arêtes ; la fonction d'incidence est $\delta_G : A_G \mapsto S_G^2$ définie par : $\delta_G(a) = (1, 2)$, $\delta_G(b) = (2, 3)$, $\delta_G(c) = (3, 1)$, $\delta_G(d) = (3, 4)$, $\delta_G(e) = (4, 4)$.

- i) Dessiner le graphe G et donner sa matrice d'adjacence M_G .
- ii) Dessiner le graphe G^3 des chemins de longueurs 3 dans G et donner la matrice d'adjacence de G^3 .
- iii) Calculer M_G^3 .

Exercice 3

- i) Rappeler la définition d'une relation d'ordre, puis d'une relation d'ordre totale. Donner un exemple de relation d'ordre non totale.

Soit Σ l'alphabet $\{a, b\}$. Si u et u' sont deux mots sur Σ on dit que u est un sous-mot de u' et on note $u \sqsubseteq u'$ si il existe des mots v et w tels que $u' = vuw$. Par exemple bb est un sous-mot de $abbab$ car $abbab = vbbw$ où $v = a$ et $w = ab$;

- ii) Pour chacun des couples de mots (u, u') suivant, dire si u est un sous-mot de u' (quand c'est le cas on explicitera les valeurs de v et w) : (a, b) , (ab, ba) , $(ab, aabb)$, $(ab, bbaa)$, $(ab, babbab)$, (ab, ϵ) , (ϵ, ab) , (ϵ, ϵ) .
- iii) Montrer que la relation $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre. Est-elle totale (justifier sa réponse) ?
- iv) Soient $u = aabbb$ et $v = bbaab$. Donner la liste des sous-mots de longueur 1 communs à u et v , puis celle des sous-mots de longueur 2 communs à u et v , etc., jusqu'à 5.
- v) On note L l'ensemble contenant u , v et tous les sous-mots communs de u et v . Dessiner le diagramme de Hasse de L pour la relation de sous-mot.
- vi) L'ensemble L est-il un treillis pour la relation de sous-mot (justifier sa réponse) ?

Exercice 4 Soit $\Sigma = \{a, b\}$ un alphabet. Pour chacun des langages sur Σ suivant, donner une expression régulière et un automate déterministe.

- i) Le langage des mots dont la première et la dernière lettre sont toutes deux égales à a .
- ii) Le langage des mots dont la première lettre est égale à la dernière lettre.
- iii) Le langage des mots contenant exactement 3 a .
- iv) Le langage des mots contenant au plus 3 a .
- v) Le langage des mots contenant au moins 3 a .