

L2 Maths et Info
Mathématiques discrètes 2
Examen du 17 juin 2008
Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 30 minutes par exo.

Exercice 1 On considère la relation de divisibilité $n \mid p$ sur \mathbb{N} (l'ensemble des entiers naturels).

- i) Montrer que c'est une relation d'ordre ;
- ii) Montrer (en donnant un exemple) que cette relation n'est pas totale ;
- iii) Soit n et p deux entiers naturels ; ont-ils une borne inférieure pour la relation \mid et si oui, quelle est-elle ? Mêmes questions pour la borne supérieure.

Exercice 2 Soit B une algèbre de Boole et $a, b, c, d \in B$. On suppose que $d \leq a \vee b$ et $d \leq a^c \vee c$.

- i) Montrer que $a^c d \leq a^c b$ et que $ad \leq ac$.
- ii) En déduire que $d \leq b \vee c$.

Exercice 3 Dans cet exercice $+$ désigne la somme booléenne (c'est à dire que $1 + 1 = 0$). Donner les tableaux de vérité puis les formes normales canoniques disjonctives et conjonctives des fonctions booléennes suivantes.

- i) $f_1(b_1, b_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_1 = b_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- ii) $f_2(b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_3 = b_1 + b_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- iii) $f_3(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_3 = b_1 + b_2, b_4 = 0, b_1 \text{ et } b_2 \text{ ne sont pas tous les deux égaux à } 1, \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2 = 1, b_3 = 0, b_4 = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 4 Soit G un graphe orienté à 4 sommets et 4 arêtes. On suppose que G a un cycle de longueur 4.

- i) Dessiner G .
- ii) Donner la fonction d'incidence $\delta_G : A_G \rightarrow S_G^2$ de G .
- iii) Donner la matrice d'adjacence M_G de G .
- iv) Calculer M_G^3 puis dessiner le graphe G^3 des chemins de longueur 3 dans G .

Exercice 5 Soit $\Sigma = \{a, b\}$ un alphabet. Pour chacun des langages sur Σ suivant, donner une expression régulière et un automate déterministe.

- i) Le langage des mots dont la première lettre est égale à la dernière lettre.
- ii) Le langage des mots dont la première et la dernière lettre sont différentes.
- iii) Le langage des mots contenant soit le sous-mot $aabb$, soit le sous-mot $baaa$ (ou les deux).
- iv) Le langage des mots ne contenant ni $aabb$, ni $baaa$.