

Mathématiques discrètes 2

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Donner les tables de vérité et les formes disjonctives canoniques des fonctions booléennes d'arité 3 qui suivent :

$$\begin{aligned}f_1(a, b, c) &= ab \vee a^c c, & f_2(a, b, c) &= a(b \vee a^c) \vee c, \\f_3(a, b, c) &= ab \vee bc \vee ca, & f_4(a, b, c) &= abc \vee a^c c^c.\end{aligned}$$

Exercice 2 Soit f une fonction booléenne à n variables. On appelle *duale de f* la fonction booléenne notée f^* et définie par :

$$f^*(b_1, \dots, b_n) = (f(b_1^c, \dots, b_n^c))^c.$$

- i) Déterminer f^* pour chacune des fonctions de $\mathcal{F}_2$.
- ii) Calculer f^* pour les fonctions constantes 0 et 1 de $\mathcal{F}_n$.
- iii) Que dire de $(f^*)^*$, $(f \vee g)^*$ et $(fg)^*$?
- iv) Comparer $(f^c)^*$ et $(f^*)^c$.
- v) Démontrer que $f = f^*$ équivaut à $f(b_1^c, \dots, b_n^c) = (f(b_1, \dots, b_n))^c$.

Exercice 3

- i) Démontrer que toute fonction booléenne f d'arité n s'écrit sous la forme :

$$f(b_1, \dots, b_n) = b_1 f(1, b_2, \dots, b_n) \vee b_1^c f(0, b_2, \dots, b_n).$$

- ii) En déduire une bijection entre $\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_{n+1}$. Retrouver le cardinal de $\mathcal{F}_n$.
- iii) Donner une autre démonstration de l'existence de la forme disjonctive canonique.
- iv) Trouver la forme disjonctive canonique de $f(b_1, b_2, b_3, b_4) = (b_1^c b_2 \vee b_3 b_4)^c$ en utilisant cette méthode.

Exercice 4 On note E l'ensemble des entiers de 5 à 15 inclus. On définit les parties suivantes de E : A_1 est l'ensemble des nombres premiers, A_2 celui des diviseurs de 140, A_3 celui des multiples de 3, A_4 celui des carrés et des cubes, A_5 celui des entiers de 9 à 12 inclus et A_6 celui des éléments dont la somme des chiffres vaut 4, 5 ou 6. Déterminer tous les recouvrements possibles de E à l'aide de ces parties. Quels sont ceux qui utilisent le moins de parties ?

Exercice 5 Dans cet exo on identifie les bits à des entiers ; la somme de deux bits/entiers est la somme au sens des entiers, en particulier $1 + 1 = 2$ et non pas 0 (comme ce serait le cas si on faisait la somme booléenne).

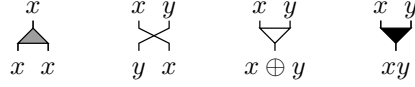
- i) Montrer qu'il existe des fonctions booléennes f et g d'arité 2 telles que, si b_1 et b_2 sont deux bits/entiers leurs somme s'écrit :

$$b_1 + b_2 = 2g(b_1, b_2) + f(b_1, b_2).$$

ii) Montrer qu'il existe des fonctions booléennes h et k d'arité 3 telles que, si b_1, b_2 et b_3 sont trois bits/entiers, leurs somme s'écrit :

$$b_1 + b_2 + b_3 = 2k(b_1, b_2, b_3) + h(b_1, b_2, b_3).$$

iii) On suppose que l'on dispose des composants électroniques de la figure (en nombre suffisant). Montrer que l'on peut construire, à l'aide de ces composants, un circuit A recevant deux courants d'in-



tensités b_1 et b_2 et renvoyant deux courants d'intensités respectives $g(b_1, b_2)$ et $f(b_1, b_2)$, c'est-à-dire la somme de b_1 et b_2 , écrite en base 2.

iv) Montrer que l'on peut construire, à l'aide de A et des composants de base, un circuit B qui reçoit trois courants b_1, b_2 et b_3 et calcule $b_1 + b_2 + b_3$.

v) Construire, à l'aide de A et de B , un circuit A_2 qui calcule la somme de deux entiers compris entre 0 et 3 inclus. Même question pour un circuit A_n qui calcule la somme de deux entiers entre 0 et $2^n - 1$.

Exercice 6 On considère les deux fonctions booléennes d'arité 4 suivantes :

$$f(a, b, c, t) = (a \vee t)(b \vee c) \quad \text{et} \quad g(a, b, c, t) = (a \vee c)(b^c \vee t).$$

Dessiner les diagrammes de Karnaugh de f et g et en déduire celui de la fonction h définie par $h = fg \vee f^c g^c$. Donner une formule simplifiée pour h .

Exercice 7 Soient p, q, r des variables propositionnelles. Pour chacune des formules suivantes, dire si elle est satisfaisable ou non et s'il s'agit d'une tautologie ou non :

$A_1 = p$	$A_5 = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	$A_9 = ((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow p$
$A_2 = p \wedge \neg p$	$A_6 = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	$A_{10} = ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
$A_3 = p \vee \neg p$	$A_7 = \neg \neg p \rightarrow p$	$A_{11} = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
$A_4 = (p \wedge \neg q) \wedge (p \rightarrow q)$	$A_8 = (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$	$A_{12} = (p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

Exercice 8 Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il vous semble correct ou non :

- si A est une tautologie alors A est satisfaisable ;
- si A n'est pas une tautologie alors A n'est pas satisfaisable ;
- si A et $A \rightarrow B$ sont des tautologies alors B est une tautologie ;
- si A et $A \rightarrow B$ sont satisfaisables alors B est satisfaisable.

Exercice 9 Montrer que B est conséquence logique de A ssi $A \rightarrow B$ est une tautologie et que A et B sont logiquement équivalentes ssi $A \leftrightarrow B$ est une tautologie.