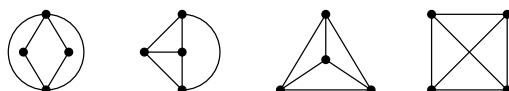


Mathématiques discrètes 2

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Est-ce que les graphes suivants sont isomorphes :



Exercice 2 Combien d'arêtes possède K_n le graphe complet d'ordre n ? Dessiner K_1 , K_2 , K_3 et K_4 . Sont-ils planaires ?

Exercice 3 [Théorème d'Euler] Soit G un graphe fini et connexe. Alors :

1. Le graphe G admet un chemin eulérien fermé si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
2. Le graphe G admet un chemin eulérien ouvert si et seulement si exactement deux de ses sommets sont de degré impair. Dans ce cas, ces deux sommets sont les extrémités de tous les chemins eulériens ouverts de G .

Exercice 4 Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino en suivant la règle ? On considèrera le cas général d'un jeu où les dominos portent tous les nombres de 0 à n .

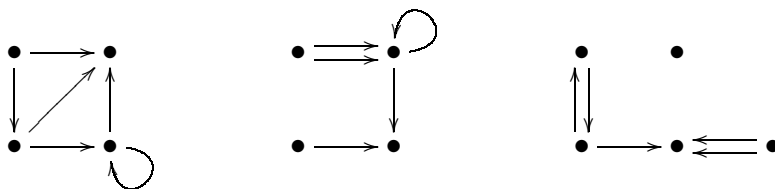
Exercice 5 On appelle *code de Gray d'ordre n* tout chemin hamiltonien fermé dans le diagramme de Hasse de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}^n$.

1. Donner des codes de Gray d'ordre 1, 2, 3 et 4.
2. On suppose que l'on a construit un code de Gray d'ordre n qui parcourt les éléments de $\mathcal{B}^n$ dans l'ordre $m_1, m_2, \dots, m_p$ avec $p = 2^n$. Montrer que $0m_1, 0m_2, \dots, 0m_p, 1m_p, \dots, 1m_1$ est un code de Gray d'ordre $n + 1$.
3. En déduire un code de Gray d'ordre 5.

Exercice 6 Dessiner les graphes orientés ayant les matrices suivantes pour matrices d'adjacence :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Donner des matrices d'adjacence pour les graphes suivants :



Exercice 8 À partir d'un graphe G , on fabrique un graphe H en retournant le sens de toutes ses flèches. Comment sont liées les matrices d'adjacence de G et H .

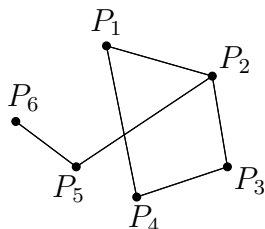
Exercice 9 On considère un graphe qui n'est pas connexe. Montrer que l'on peut numéroter ses sommets de telle sorte que la propriété de non connexité se lise sur sa matrice d'adjacence.

Exercice 10 Dessiner un graphe ayant la matrice suivante pour matrice d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2 et M^3 . En déduire une interprétation des coefficients de la matrice M^n .

Exercice 11 Voici le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques :



Quel est le nombre minimum de wagons nécessaires à leur transport ?

Exercice 12 On dispose d'une carte représentant l'Allemagne, la Belgique, la France, l'Italie, le Luxembourg et les Pays-Bas. On veut colorier chacun de ces états de telle sorte que deux pays voisins aient des couleurs distinctes. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent.