

Mathématiques discrètes 2

Feuille d'exercices 4

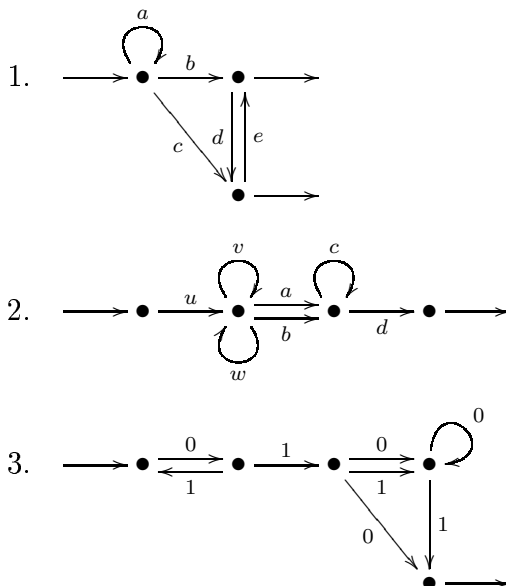
Exercice 1. Soit Σ un alphabet non vide. Montrer que l'ensemble Σ^* des mots construits sur Σ , muni de la concaténation et du mot vide, est un monoïde.

Exercice 2. Soient M, N deux monoïdes et $\varphi : M \rightarrow N$ un morphisme de monoïdes. Montrer que l'on définit une congruence $\equiv$ sur M en posant $x \equiv y$ si $\varphi(x) = \varphi(y)$.

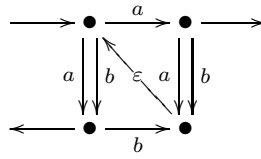
Exercice 3. Construire le monoïde libre à un générateur.

Exercice 4. Soit Σ un alphabet non vide. On définit l'*ordre préfixe* sur le monoïde Σ^* par $u \sqsubseteq v$ s'il existe un mot u' tel que $uu' = v$. Montrer que c'est une relation d'ordre sur Σ^* qui admet un plus petit élément et des bornes inférieures. Montrer que $(\Sigma^*, \sqsubseteq)$ n'est pas un treillis dès que Σ contient au moins deux lettres.

Exercice 5. Déterminer les langages reconnus par les automates suivants :



Exercice 6. Donner le langage reconnu par cet automate :



Construire un automate déterministe, puis un automate complet, reconnaissant le même langage.

Exercice 7. On fixe l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Construire des automates reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \Sigma^*$.
2. $L_2 = \Sigma^* u \Sigma^*$, où u est un mot de Σ^* fixé.
3. L_3 est l'ensemble des mots u de Σ^* qui contiennent un nombre pair de fois la lettre a .
4. $L_4 = \{a^k b^k, 0 \leq k \leq 3\}$.

Exercice 8. On considère l'alphabet $\{a, b\}$. Dire si les langages suivants sont réguliers ou non :

1. Le langage $L_5 = \{(ab)^k, k \in \mathbb{N}\}$.
2. Le langage $L_6 = \{a^k b^k, k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 9. Dire si l'implication suivante est vraie ou non : si L est un langage régulier et L' un sous-langage de L , alors L' est régulier.

Exercice 10. On considère l'ensemble des a^p où p est un nombre premier. Est-ce un langage régulier ?