

DEA MDFI
Examen de logique

Exercice 1 Calculer la beta-réduction gauche du lambda-terme : $(\lambda z(z)z)\lambda f \lambda x(f)(f)x$.

Exercice 2 Trouver des lambda-termes Q et R représentant respectivement les quotients et restes de la division euclidienne, *i.e.*, tels que $(Q)\underline{m} \underline{n} =_{\beta} \underline{q}$ et $(R)\underline{m} \underline{n} =_{\beta} \underline{r}$ ssi $m = qn + r$ avec $r < n$.

Exercice 3 Trouver un lambda-terme typable de type $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.

Exercice 4 Montrer que le terme $\lambda x((x)\lambda y(y)x)\lambda z z$ est typable dans le système F de type $\forall\alpha(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \forall\alpha(\alpha \rightarrow \alpha)$.

Exercice 5 Calculer l'interprétation dans le modèle de Engeler des termes $\lambda x x$, $\lambda x \lambda y(x)y$, $\lambda x(x)x$ et $(\lambda x(x)x)\lambda x(x)x$.

Exercice 6 Soit $F : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \rightarrow \mathcal{P}(\{*\})$ définie par $F(A) = \emptyset$ si $\bigcap A \neq \emptyset$ et $F(A) = \{*\}$ si $\bigcap A = \emptyset$. Montrer que F est croissante mais pas continue.

Exercice 7 Soit F la fonction définie par $F(e) = \{e\}(e)$ et P le prédicat $P(e)$ ssi $F(e)\downarrow$. Donner les raisons pour lesquelles P est r.e. Montrer que P n'est pas récursif (indication : on montrera que $\neg P$ n'est pas r.e.). En déduire *l'indécidabilité du problème d'arrêt*, *i.e.*, que le prédicat $A(e, n)$ ssi $\{e\}(n)\downarrow$ n'est pas récursif.