DEA MDFI

Examen de logique

Exercice 1 Soient $\mathcal{T}_{A,B}$ et $\mathcal{P}_{A,B}$ les formules :

$$\mathcal{T}_A = (\neg A \to A) \to A \qquad \textit{(tiers-exclus)}$$
$$\mathcal{P}_{A,B} = ((A \to B) \to A) \to A \qquad \textit{(loi de Pierce)}$$

où $\neg A$ est la formule $A \to \bot$.

i) Donner des démonstrations dans le calcul des séquents LK du tiers-exclus et de la loi de Pierce.

ii) Montrer que le tiers-exclus n'est pas démontrable en déduction naturelle intuitionniste.

iii) Donner une démonstration en déduction naturelle classique du tiers-exclus.

iv) Donner une démonstration en déduction naturelle intuitionniste du séquent $\mathcal{T}_A \vdash \mathcal{P}_{A,B}$ (on pourra se servir de la règle du faux : d'une contradiction on peut déduire n'importe quelle formule).

v) Trouver une formule B tel que le séquent $\mathcal{P}_{A,B} \vdash \mathcal{T}_A$ soit prouvable en déduction naturelle intuitionniste.

Exercice 2 Donner un lambda-terme $\bar{F}$ qui représente la suite de Fibonacci, c'est à dire tel que $(\bar{F})\bar{n}$ se réduit en $\bar{F}_n$ où $\bar{n}$ est la représentation par une entier de Church de l'entier n et où F_n est le n-ième terme de la suite de Fibonacci (on rappelle que F_n est défini par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

Exercice 3 Montrer, en utilisant le théorème de normalisation du système F, que la formule $\forall\alpha\,\alpha$ n'est pas démontrable en déduction naturelle intuitionniste du second ordre.

Exercice 4 On note $\mathcal{B}$ le type du système F : $\forall\alpha((\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha)$.

i) Donner la forme générale d'un lambda-terme en forme normale typable de type $\mathcal{B}$. En déduire qu'à toute suite finie s de 0 et de 1 on peut associer de manière unique un lambda-terme normal $\bar{s}$ typable de type $\mathcal{B}$ (on dit que $\mathcal{B}$ est le type des entiers binaires).

ii) Donner des lambda-termes $\bar{\epsilon}$, $\bar{S}_0$ et $\bar{S}_1$ tels que :

- $\bar{\epsilon}$ est typable de type $\mathcal{B}$; $\bar{S}_i$ est typable de type $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$;
- $\bar{\epsilon}$ représente la suite vide ; pour $i = 0, 1$, $\bar{S}_i$ représente le i-successeur S_i, c'est à dire que $(\bar{S}_i)\bar{s}$ se normalise en $\bar{is}$ où s est une suite finie de 0 et de 1 et is est la même suite préfixée par i.