DEA MDFI

Examen de logique

Exercice 1 β-réduire (jusqu'à la forme normale) le λ-terme suivant :

$$(\lambda F\,(F)\lambda x\,(F)\lambda y\,x)\lambda f\,(f)(f)z$$

Exercice 2 Calculer la sémantique des termes clos suivants dans le modèle d'Engeler :

i) $\lambda x\,x$

ii) $\lambda f \lambda x\,x$

iii) $\lambda f \lambda x\,(f)x$

iv) $\lambda f \lambda x\,(f)(f)x$

Exercice 3 On se donne deux variables distinctes du λ-calcul ξ et ζ. On définit une relation binaire $t \sqsubset s$ entre λ-termes ne contenant ni ξ ni ζ et λ-termes par :

— si t est une variable x distincte de ξ et de ζ alors $t \sqsubset t$;

— si t est $(u)v$ et si $u \sqsubset u_0$, $v \sqsubset v_0$ alors $t \sqsubset (\xi)u_0v_0$:

— si t est $(\lambda x\,u)v$ et si $u \sqsubset u_0$, $v \sqsubset v_0$ alors $t \sqsubset (\lambda x\,u_0)v_0$;

— si t est $\lambda x\,u$ et $u \sqsubset u_0$ alors $t \sqsubset (\zeta)\lambda x\,u_0$.

Si t est un λ-terme (contenant éventuellement ξ et ζ) on note $|t|$ le terme défini par :

— si t est une variable x distincte de ξ et de ζ alors $|t| = x$;

— si t est $(\xi)u$ (ou $(\zeta)u$) alors $|t| = u$;

— si t est $(u)v$ et u n'est ni ξ ni ζ alors $|t| = (|u|)|v|$;

— si t est $\lambda x\,u$ alors $|t| = \lambda x\,|u|$.

Remarquons que $|t|$ n'est pas toujours défini (si t est ξ ou ζ, alors $|t|$ n'est pas défini) et que lorsqu'il l'est il ne contient ni ξ ni ζ.

i) Montrer que pour tout terme ne contenant ni ξ ni ζ, si $t \sqsubset t_0$, alors on a $t = |t_0|$.

ii) Soient t_0 et s_0 des termes (pouvant contenir ξ et ζ), et soit x une variable distincte de ξ et ζ. Montrer que

$$|t_0[s_0/x]| = |t_0|[|s_0|/x]\,.$$

iii) Soient t_0 et t'_0 des termes (pouvant contenir ξ et ζ), et tels que $t_0\ \beta\ t'_0$. Montrer que $|t_0|\ \beta\ |t'_0|$.

iv) Montrer que pour tout terme ne contenant ni ξ ni ζ si $t \sqsubset t_0$ et $t_0\ \beta\ t'$ alors $t\ \beta\ |t'|$.

On rappelle la définition de la relation ρ entre λ-termes utilisée dans le cours pour démontrer la confluence : si x est une variable alors $x\ \rho\ x$; si $u\ \rho\ u'$ et $v\ \rho\ v'$ alors $(u)v\ \rho\ (u')v'$, $(\lambda x\,u)v\ \rho\ u'[v'/x]$ et $\lambda x\,u\ \rho\ \lambda x\,u'$.

v) Montrer que si t et t' ne contiennent ni ξ ni ζ alors si $t\ \rho\ t'$, il y a des termes t_0 et t'_0 tels que $t \sqsubset t_0$, $t_0\ \beta\ t'_0$ et $t' = |t'_0|$.

vi) En trouvant des types adéquats pour ses variables libres (en particulier pour ξ et ζ) montrer que pour tout terme t ne contenant ni ξ ni ζ si $t \sqsubset t_0$ alors t_0 est typable dans les types simples.

vii) En déduire que pour tout terme t ne contenant pas ξ et ζ l'ensemble des *développements finis de t* $\{t',\ t\ \rho\ t'\}$ est fini.