DEA MDFI
Examen de Logique

Jeudi 6 janvier 2000

On rappelle que si A est une formule de la logique linéaire, sa duale $A^\perp$ est définie par les lois de de Morgan.

Calcul des séquents linéaire

On se place dans le fragment MELL de la logique linéaire, c'est-à-dire que l'on ne considère que les formules construites avec : les constantes $\perp$ et 1, les formules atomiques, les connecteurs $\parr$ et $\otimes$ et les modalités ! et ?.

Question 1 Donner une démonstration du séquent $\vdash ?A^\perp, ?B^\perp, !(A \otimes B)$.

On définit les formules *positives* et *négatives* par :

- la constante $\perp$ est négative, la constante 1 est positive ;
- si A est une formule de MELL alors $?A$ est négative et $!A$ est positive ;
- si N_1 et N_2 (resp. P_1 et P_2) sont négatives (resp. positives) alors $N_1 \parr N_2$ est négative (resp. $P_1 \otimes P_2$ est positive).

Question 2 Montrer que A est négative ssi $A^\perp$ est positive.

Question 3 Montrer par récurrence sur P que si P est positive alors $\vdash P^\perp, !P$ est démontrable.

Question 4 En déduire que les règles structurelles sont *admissibles* pour toutes les formules négatives c'est-à-dire que, si N est une formule négative et Γ un contexte de formules de MELL :

affaiblissement si $\vdash \Gamma$ est prouvable alors $\vdash N, \Gamma$ est prouvable ;

contraction si $\vdash N, N, \Gamma$ est prouvable alors $\vdash N, \Gamma$ est prouvable ;

promotion si $\vdash A, N, ?\Gamma$ est prouvable alors $\vdash !A, N, ?\Gamma$ est prouvable.

Sémantique cohérente

On étudie ici une alternative à la présentation des espaces cohérents vue en cours. On dira que deux ensembles u et u' sont *orthogonaux*, et on écrira $u \perp u'$ si $u \cap u'$ a au plus un élément. Soient A un ensemble et C un ensemble de parties de A. On pose

$$C^\perp = \{u' \subseteq A \mid \forall u \in C,\ u' \perp u\}.$$

Question 1 Montrer que $C \subseteq C^{\perp\perp}$ et $C^{\perp\perp\perp} = C^\perp$.

On appellera *espace cliqueux* une paire $E = (|E|, \mathrm{C}(E))$ où $|E|$ est un ensemble et $\mathrm{C}(E)$ est un ensemble de parties de $|E|$ qui vérifie $\mathrm{C}(E)^{\perp\perp} = \mathrm{C}(E)$. Remarquons que la question 1 montre que si E est un espace cliqueux alors la paire $(|E|, \mathrm{C}(E)^{\perp})$ est un espace cliqueux, que l'on notera $E^{\perp}$.
La question suivante établit une propriété générale des espaces cliqueux qui servira dans la suite (en particulier pour résoudre les questions 5 et 6).

Question 2 Montrer que si $E = (|E|, \mathrm{C}(E))$ est un espace cliqueux alors :

- pour tout $a \in |E|$, $\{a\} \in \mathrm{C}(E)$;
- pour tout $u \in \mathrm{C}(E)$ et tout $v \subseteq u$, $v \in \mathrm{C}(E)$.

Si $X = (|X|, \frown_X)$ est un espace cohérent, on désigne par $\mathrm{Cl}(X)$ l'ensemble de ses cliques.

Question 3 Montrer que si X est un espace cohérent alors $\mathrm{Cl}(X^{\perp}) = \mathrm{Cl}(X)^{\perp}$ (dans cette équation, la notion d'orthogonalité utilisée à gauche est celle des espaces cohérents, et celle utilisée à droite est la nouvelle notion d'orthogonalité définie ci-dessus).

Question 4 En déduire que $X^{-} = (|X|, \mathrm{Cl}(X))$ est un espace cliqueux et que $(X^{\perp})^{-} = (X^{-})^{\perp}$.

Si E est un espace cliqueux, on désigne par $\frown_{E^+}$ la relation binaire sur $|E|$ définie par : $a \frown_{E^+} b$ si et seulement si $\{a, b\} \in \mathrm{C}(E)$.

Question 5 Montrer que si E est un espace cliqueux alors $E^{+} = (|E|, \frown_{E^+})$ est un espace cohérent (la relation $\frown_{E^+}$ étant clairement symétrique, il suffira de montrer qu'elle est réflexive).

Question 6 Montrer que si E est un espace cliqueux alors $(E^{\perp})^{+} = (E^{+})^{\perp}$ (l'une des inclusions se démontre en utilisant la question 2).

Question 7 Montrer que si X est un espace cohérent alors $(X^{-})^{+} = X$ et que si E est un espace cliqueux alors $(E^{+})^{-} = E$.

Question 8 Soient E et F deux espaces cliqueux et soit $f \subseteq |E| \times |F|$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- $f \in \mathrm{Cl}(E^{+} \multimap F^{+})$
- Pour tout $x \in \mathrm{C}(E)$ et pour tout $y' \in \mathrm{C}(F^{\perp})$, on a $f \perp (x \times y')$.

On définit l'espace cliqueux $E \multimap F$ par $|E \multimap F| = |E| \times |F|$ et

$$\mathrm{C}(E \multimap F) = \{x \times y' \mid x \in \mathrm{C}(E) \text{ et } y' \in \mathrm{C}(F^{\perp})\}^{\perp}.$$

On vient donc de voir que $(E \multimap F)^{+} = E^{+} \multimap F^{+}$ (dans cette équation, l'implication linéaire utilisée à gauche est celle des espaces cliqueux et celle utilisée à droite est l'implication linéaire des espaces cohérents).

Question 9 De même donner des définitions directes pour $E \parr F$ et $E \otimes F$.

Question 10 Soit E un espace cliqueux. Si $x \in \mathrm{C}(E)$, on désigne par $x^{!}$ l'ensemble des parties finies de x. Montrer que $x^{!} \in \mathrm{C}((!(E^{+}))^{-})$.

Question 11 Montrer que $\mathrm{C}((!(E^{+}))^{-}) = \{x^{!} \mid x \in \mathrm{C}(E)\}^{\perp\perp}$. En déduire une définition de $!E$ (pour E espace cliqueux) qui vérifie $(!E)^{+} = !(E^{+})$.

Sémantique des phases

On se place dans le fragment multiplicatif sans atome de la logique linéaire, c'est-à-dire que les formules sont construites en utilisant uniquement les constantes multiplicatives 1 et $\perp$ et les connecteurs multiplicatifs $\otimes$ et $\parr$.
Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs que l'on considère comme un monoïde commutatif pour l'addition. On définit un modèle des phase $C = (\mathbb{Z}, \perp_C)$ où $\perp_C = \{1\}$.

Question 1 Montrer qu'une partie F de $\mathbb{Z}$ non triviale, c'est-à-dire non vide et distincte de $\mathbb{Z}$ tout entier, est un fait ssi F est un singleton $\{n\}$ pour un entier n de $\mathbb{Z}$.

Si F est un fait non trivial, on note $F\!\downarrow$ l'entier n tel que $F = \{n\}$.

Question 2 Soient $F = \{n\}$ et $G = \{p\}$ deux faits ; calculer $(F^\perp)\!\downarrow$, $(F \otimes G)\!\downarrow$ et $(F \parr G)\!\downarrow$.

On note $|A|_\perp$ le nombre d'occurrences de $\perp$ dans A et $|A|_\parr$ le nombre d'occurrences de $\parr$ dans A.

Question 3 Montrer que si A est une formule alors $A^\bullet$ est un fait non trivial.
Montrer que dans le modèle C, $(A^\bullet)\!\downarrow = |A|_\perp - |A|_\parr$.

Question 4 En déduire que si A est prouvable alors $|A|_\perp = |A|_\parr$.

Question 5 Donner une formule A non prouvable telle que $|A|_\perp = |A|_\parr$.