DESS MINT

Examen du cours « Preuves » (Laurent Regnier)

On rappelle que la convention est de noter $A \to B \to C$ pour le type $A \to (B \to C)$. L'entier de Church $\lambda f\, \lambda x\, (f) \dots (f)x$ contenant n occurrence de la variable f est noté $\overline{n}$.

Exercice 1 Soient A, B et C des types simples. On note $A \times_C B$ le type $(A \to B \to C) \to C$.

i) Appliquer la convention ci-dessus pour donner l'expression complètement parenthésée de $A \times_C B$.

Réponse.

$$A \times_C B = (A \to (B \to C)) \to C$$

ii) Montrer que, si a et b sont des termes de type A et B alors le terme $\lambda f\, ((f)a)b$ est typable de type $A \times_C B$.

Réponse. Si f est déclarée de type $A \to B \to C$ $(= A \to (B \to C))$ alors $((f)a)b$ a le type C puisque a a le type A et b le type B. Par conséquent $\lambda f\, ((f)a)b$ a le type $(A \to B \to C) \to C = A \times_C B$.

iii) Montrer que les termes $\pi_1 = \lambda c\, (c)\lambda x_1\, \lambda x_2\, x_1$ et $\pi_2 = \lambda c\, (c)\lambda x_1\, \lambda x_2\, x_2$ ont respectivement les types : $(A \times_{C_1} B) \to A$ et $(A \times_{C_2} B) \to B$ pour des types C_1 et C_2 que l'on précisera.

Réponse. Si on déclare $x_1 : A$ et $x_2 : B$ alors $\lambda x_1\, \lambda x_2\, x_1$ a le type $A \to B \to A$ et $\lambda x_1\, \lambda x_2\, x_2$ a le type $A \to B \to B$.

On prend $C_1 = A$ et on déclare c de type $A \times_A B = (A \to B \to A) \to A$; alors $(c)\lambda x_1\, \lambda x_2\, x_1$ a le type A et $\lambda c\, (c)\lambda x_1\, \lambda x_2\, x_1$ a le type $A \times_A B \to A$. De même si on prend $C_2 = B$ alors $\lambda c\, (c)\lambda x_1\, \lambda x_2\, x_2$ a le type $A \times_B B \to B$.

Exercice 2

i) Trouver un terme clos de type $(A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$.

Réponse. $\lambda f\, \lambda g\, \lambda x\, (g)(f)x$ en déclarant $f : A \to B$, $g : B \to C$ et x de type A.

ii) Trouver un terme clos de type $(A \to B \to C) \to B \to A \to C$.

Réponse. $\lambda f\, \lambda y\, \lambda x\, ((f)y)x$ en déclarant $f : A \to B \to C$, $x : A$, $y : B$.

iii) Trouver un terme clos de type $((A \to A) \to A) \to A$.

Réponse. On a vu en cours que le terme $\lambda f\, (f)\lambda x\, (f)\lambda d\, x$ avait ce type.

Il y a toutefois plus simple : on sait que $\lambda x\, x$ a le type $A \to A$ donc si on déclare $f : (A \to A) \to A$ on a $(f)\lambda x\, x : A$ et conséquemment $\lambda f\, (f)\lambda x\, x : ((A \to A) \to A) \to A$.

Exercice 3

i) Soit $A = \lambda n\, \lambda p\, \lambda f\, \lambda x\, ((n)f)((p)f)x$ et $T = \lambda n\, \lambda p\, \lambda f\, (n)(p)f$. Montrer que $((A)\overline{n})\overline{p} \approx_\beta \overline{n+p}$ et que $((T)\overline{n})\overline{p} = \overline{n \times p}$.

Réponse.

$$\begin{aligned}
((A)\overline{n})\overline{p} &\succ \lambda f\, \lambda x\, ((\overline{n})f)((\overline{p})f)x = \lambda f\, \lambda x\, ((\lambda f'\, \lambda x'\, \underbrace{(f') \dots (f')}_{n\times} x')f)((\overline{p})f)x \\
&\succ \lambda f\, \lambda x\, \underbrace{(f) \dots (f)}_{n\times}((\overline{p})f)x = \lambda f\, \lambda x\, \underbrace{(f) \dots (f)}_{n\times}((\lambda f'\, \lambda x'\, \underbrace{(f') \dots (f')}_{p\times} x')f)x \\
&\succ \lambda f\, \lambda x\, \underbrace{(f) \dots (f)}_{n\times}\underbrace{(f) \dots (f)}_{p\times} x = \lambda f\, \lambda x\, \underbrace{(f) \dots (f)}_{n+p\times}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
((T)\overline{n})\overline{p} &\succ \lambda f\,(\overline{n})(\overline{p})f = \lambda f\,(\overline{n})(\lambda f'\,\lambda x'\,\overbrace{(f')\dots(f')}^{p\times}\,x')f \\
&\succ \lambda f\,(\overline{n})\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x' = \lambda f\,(\lambda f'\,\lambda x\,\overbrace{(f')\dots(f')}^{n\times}\,x)\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x' \\
&\succ \lambda f\,\lambda x\,\underbrace{(\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x')\dots(\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x')}_{n\times}\,x \\
&\succ \lambda f\,\lambda x\,\underbrace{(\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x')\dots(\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x')}_{n-1\times}\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x \\
&\succ \lambda f\,\lambda x\,\underbrace{(\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x')\dots(\lambda x'\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x')}_{n-2\times}\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{2p\times}\,x \\
&\succ \lambda f\,\lambda x\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{np\times}\,x = \overline{n\times p}
\end{aligned}
$$

ii) On note P un terme représentant le prédécesseur sur les entiers de Church : $(P)\overline{n+1} \approx_\beta \overline{n}$. Écrire, en utilisant P, un terme M représentant la soustraction, c'est à dire vérifiant : $((M)\overline{n})\overline{p} \approx_\beta \overline{n-p}$ dès que $n \geq p$.

Réponse. Soustraire p à n, c'est itérer p fois soustraire 1 à n. Pour itérer p fois la fonction P sur n, comme $\overline{p}$ est un itérateur, il suffit de l'appliquer à P et n soit :

$$M = \lambda n\,\lambda p\,((p)P)n$$

iii) Quelle est la forme normale du terme $(\lambda n\,((n)\lambda b\,\lambda x\,\lambda y\,((b)y)x)\lambda x\,\lambda y\,x)\overline{n}$ en fonction de la valeur de l'entier n ?

Réponse. Notons $N = \lambda b\,\lambda x\,\lambda y\,((b)y)x$, $V = \lambda x\,\lambda y\,x$ et $F = \lambda x\,\lambda y\,y$. Alors on a $(N)V \succ F$ et $(N)F \succ V$, c'est à dire que N représente la négation sur les booléens de Church.

Avec ces notations, le terme s'écrit $(\lambda n\,((n)N)V)\overline{n}$ qui se réduit en $((\overline{n})N)V$ qui se réduit en :

$$\underbrace{(N)\dots(N)}_{n\times}\,V.$$

On itère donc n fois la négation sur le booléen V. Le résultat est donc V si n est pair, F sinon.

Exercice 4 Soit k et n_1, …, n_k des entiers. On note E_k le terme $(\dots((\overline{n}_1)\overline{n}_2)\dots)\overline{n}_k$.

i) Donner la définition par récurrence de E_k.

Réponse. $E_1 = \overline{n}_1$ et $E_{k+1} = (E_k)\overline{n}_{k+1}$.

ii) Soient n et p deux entiers ; quelle est, en fonction de n et p, la forme normale de $(\overline{n})\overline{p}$? En déduire la forme normale de E_2, de E_3, et enfin de E_k.

Réponse.

$$
\begin{aligned}
(\overline{n})\overline{p} &= (\lambda p\,\lambda f\,(p)\dots(p)f)\overline{p} \\
&\succ \lambda f\,(\overline{p})\dots(\overline{p})f \\
&\succ \lambda f\,\underbrace{(\overline{p})\dots(\overline{p})}_{n-1\times}\,\lambda x\,\overbrace{(f)\dots(f)}^{p\times}\,x
\end{aligned}
$$

On a vu lors du calcul de $((T)\overline{n})\overline{p}$ dans l'exercice précédent, que :

$$(\overline{n})\lambda x\,\underbrace{(f)\dots(f)}_{p\times}\,x \succ \lambda x\,\underbrace{(f)\dots(f)}_{np\times}\,x$$

Donc le calcul ci-dessus se continue en :

$$\begin{aligned}
(\overline{n})\overline{p} &\succ \lambda f\ \underbrace{(\overline{p})\ldots(\overline{p})}_{n-2\times}\ \lambda x\ \overbrace{(f)\ldots(f)}^{p^2\times}\, x \\
&\ \vdots \\
&\succ \lambda f\ \lambda x\ \underbrace{(f)\ldots(f)}_{p^n\times}\, x
\end{aligned}$$

La forme normale de $E_2 = (\overline{n}_1)\overline{n}_2$ est donc $\overline{n_2^{n_1}}$, celle de E_3 est $\overline{n_3^{n_2^{n_1}}}$ et plus généralement celle de E_k est :

$$\overline{n_k^{\cdot^{\cdot^{n_1}}}}$$

iii) Montrer que pour tous k, n_1, …, n_k, le terme E_k est typable de type $\mathbb{N}_A = (A \to A) \to A \to A$.

Réponse. Par récurrence sur k. Si $k = 1$, $E_k = \overline{n}_1$ est typable de type $\mathbb{N}_A$ car c'est un entier de Church et tous les entiers de Church sont typables de type $\mathbb{N}_A$.

Supposons, par récurrence, que E_k est typable de type $\mathbb{N}_A$. Alors, en remplaçant A par $A \to A$, on a que E_k est typable de type $\mathbb{N}_{A\to A} = ((A \to A) \to (A \to A)) \to (A \to A) \to (A \to A) = \mathbb{N}_A \to \mathbb{N}_A$ et donc $E_{k+1} = (E_k)\overline{n}_k$ a bien le type $\mathbb{N}_A$ puisque $\overline{n}_{k+1}$ a le type $\mathbb{N}_A$.