

TD 2- Séries à termes réels

Exercice 1 ([1], exercice II-2 et II-5, [7], exercice 5.2.1)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente:

$$u_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n^2}, \quad u_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n}, \quad u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad u_n = \sin \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) - a - \frac{b}{n},$$
$$u_n = \frac{1}{n^a} \int_0^n \frac{\arctan t}{1+t} dt, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}.$$

Exercice 2 ([7], exercice 5.1.4)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la série $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}$.

Exercice 3 ([7], exercice 5.1.6)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$.

(i) Trouver une relation entre u_{n+2} et u_n , et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du$.

Exercice 4 ([7], exercice 5.2.4)

Soit $a > 1$ et $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Etudier la série $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 5 ([1], exercices II-9, II-10 et II-20, [7], exercice 5.2.7) *Règle d'Abel*

(i) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de réels. On suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\exists M \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq M,$$
$$b_n \rightarrow 0,$$
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - b_{n+1}| < +\infty.$$

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

(ii) Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature des séries suivantes:

$$u_n = \frac{\cos n}{n+1}, \quad u_n = \sin n \sin \left(\frac{1}{n+1} \right), \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos n},$$

$$u_n = \sin(\pi e n!), \quad u_n = \sin(2\pi e n!).$$

Pour les deux dernières séries, on pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle entre 0 et 1.

Exercice 6 ([1], exercice II-21, [8], exercice 1.1.13)

Montrer que la série $u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge, en prouvant qu'elle ne vérifie pas le critère de Cauchy.

Exercice 7 ([1], exercice II-27, [6], section 1.5.2, voir aussi [4], p. 99) *Séries commutativement convergentes*

(i) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels qui tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sup(u_n, 0)$ et $b_n = \sup(-u_n, 0)$ et on suppose que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ divergent. Montrer que, pour tout $S \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)} = S$. On pourra poser $\varphi(0) = 0$ et, si on a construit $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$,

$$\varphi(n+1) = \inf \{k \notin \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}; u_k \geq 0\} \text{ si } \sum_{k=0}^n u_{\varphi(k)} < S,$$

$$\varphi(n+1) = \inf \{k \notin \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}; u_k \leq 0\} \text{ si } \sum_{k=0}^n u_{\varphi(k)} \geq S.$$

Vérifier que ce résultat reste valable si $S = \pm\infty$.

(ii) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|$ converge si, et seulement si, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_{\varphi(n)}$ converge.

(iii) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|$ converge. Montrer qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_{\varphi(n)} = S$.

Exercice 8 ([6], section 1.4 et exercice 1.40, [4], p. 101) *Produit de séries*

(i) Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites à valeurs dans $[0, +\infty[$. On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n =$

$U \in \mathbb{R}$ et $\sum_{n \geq 0} v_n = V \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n = UV$ (on posera $W_n = \sum_{k=0}^n w_k$ et on comparera $W_n, U_n V_n$ et W_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(ii) On suppose maintenant que $u_n, v_n \in \mathbb{R}$ et que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ convergent absolument. Montrer que la conclusion de la question (i) reste valable.

(iii) On suppose maintenant que $u_n, v_n \in \mathbb{R}$, que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge et que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge absolument. Montrer que la conclusion de la question (i) reste valable (théorème de Mertens).

(iv) Que se passe-t-il si on suppose seulement que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ convergent ?

Exercice 9 ([6], section 1.9) *Produits infinis*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^n u_k$. On dit que le produit infini $\prod_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si, et seulement si, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $P \neq 0$. On pose alors $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = P$.

(i) On suppose que le produit infini $\prod u_n$ converge. Montrer que $u_n \rightarrow 1$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$. Montrer que, si le produit infini $\prod (1 + |v_n|)$ converge, alors le produit infini $\prod (1 + v_n)$ converge (utiliser la question précédente et la fonction logarithme).

(iii) Quelle est la nature du produit $\prod_{n \geq 2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

Exercice 10 ([6], chapitre 1, exercice 1.42)

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

(i) Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right)$ converge.

(ii) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n = 2p + 1$. Vérifier que

$$\begin{aligned}\sin(nt) &= n \sin t \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right), \\ \sin(nt) &= n \cos^n t \tan t \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\tan^2 t}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right).\end{aligned}$$

(iii) Soit $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$. Montrer que

$$\frac{\sin x}{\sin y} > \frac{x}{y} \text{ et } \frac{\tan x}{\tan y} < \frac{x}{y}.$$

(iv) En déduire que

$$t \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{t^2}{\pi^2 n^2}\right) = \sin t.$$

Exercice 11 ([8], exercice 1.1.8, [1], exercice II-34)

(i) Montrer que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est une partie infinie de $\mathbb{N}$, et en déduire qu'il existe une bijection $n \mapsto p_n$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{P}$.

(ii) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq n + 2$. En déduire que, pour tout $\alpha > 1$, le produit infini $\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$ converge.

(iii) Montrer que, pour tout $\alpha > 1$,

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right) = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)^{-1}.$$

(iv) Montrer que le produit infini $\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ diverge, en déduire la nature de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_n}.$$

Exercice 12 ([3], p. 324) *Lemme de Cotlar*

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$.

- (i) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels tels que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. On suppose que, pour tous $i, j \geq 1$, $u_i u_j \leq \varepsilon^{|i-j|}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} u_i \leq \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon}}.$$

- (ii) Soit E un espace de Hilbert séparable, $n \geq 1$ et $H_1, \dots, H_n$ des applications linéaires continues auto-adjointes de E dans E , telles que $H_i H_j = H_j H_i$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$, et vérifiant

$$\|H_i\| \leq 1 \text{ et } \|H_i H_j\| \leq \varepsilon^{|i-j|}$$

pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^n H_i \right\| \leq \frac{1}{1 - \sqrt{\varepsilon}}.$$

Exercice 13 ([5], p. 131, [2], p. 199)

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^\alpha \sin^2 x} dx < +\infty \text{ si, et seulement si, } \alpha > 4.$$

Exercice 14 ([8], exercice 1.1.14)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la série $\frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$, où $E(x)$ est la partie entière de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

References

- [1] M. Andler, J. D. Bloch, B. Mailliard, *Exercices corrigés de mathématiques*, Analyse II, Suites et séries numériques, Ellipses.
- [2] M. Andler, J. D. Bloch, B. Mailliard, *Exercices corrigés de mathématiques*, Analyse III, Ellipses.
- [3] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, t.2, Gauthier-Villars.
- [4] B. Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses.

- [5] E. Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS*, tome 3, Ellipses.
- [6] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales*, Vol 4, Séries et équations différentielles, Masson.
- [7] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Analyse 1., Exercices avec solutions*, Masson.
- [8] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Analyse 2., Exercices avec solutions*, Masson.