Chapitre 2

Fonctions Continues

- **Semaine 1** : Etude des sous-paragraphes 1.1 et 1.2. Faire les exercices d'apprentissage 2.1—2.9.
- **Semaine 2** : Etude des sous-paragraphes 1.3, 1.4 et 1.5. Faire les exercices d'apprentissage 2.10—2.12 et les exercices d'approfondissement 2.20—2.23.
- **Semaine 3** : Etude du sous-paragraphe 1.6 et du paragraphe 2. Faire les exercices d'apprentissage 2.13—2.15 et les exercices d'approfondissement 2.24—2.29.

1. Continuité.

1.1. Fonctions continues.

★ **1.1.1. Définition.** Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $x_0 \in E$.

- On dit que f est *continue en* x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

- On dit que f est *continue sur* E si et seulement si f est continue en tout point $x_0 \in E$.
- Si A est une partie de E et si $f : A \rightarrow F$ est une application, dire que f est continue en $x_0 \in A$ est équivalent à dire que f est continue en x_0 , A étant munie de la métrique induite.

1.1.2. Remarques et propriétés.

- f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \quad \exists V' \in \mathcal{V}(x_0), \quad f(V') \subset V.$$

- f est continue en x_0 si et seulement si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 .

- Id_E est continue ainsi que toute fonction constante.
- Si x_0 est un point isolé de E , alors toute fonction $f : E \rightarrow F$ est continue en x_0 . En particulier, si E est discret, toute fonction $f : E \rightarrow F$ est continue.
- La composée de deux fonctions continues est continue.
- Si $A \subset E$ et si $f : E \rightarrow F$ est continue, alors $f|_A : A \rightarrow F$ est continue. La réciproque est fausse.

Preuve. Exercice 2.1

1.1.3. Proposition. *Si A est voisinage de x_0 alors $f|_A$ est continue en x_0 si et seulement si f est continue en x_0 .*

Preuve. Exercice 2.2

En conclusion, la continuité et une propriété locale. Les deux propositions suivantes sont particulièrement importantes, car ce seront généralement les critères utilisés (avec la définition bien sûr) pour montrer la continuité d'une fonction.

★ **1.1.4. Proposition.** *f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Preuve. Exercice 2.3.

★ **1.1.5. Proposition.** *Soit $f : E \rightarrow F$ une application, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

- (i) f est continue sur E .
- (ii) pour tout ouvert U de F , $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E .
- (iii) pour tout fermé G de F , $f^{-1}(G)$ est fermé dans E .

Preuve. Exercice 2.4.

1.1.6. Remarques. *$f : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si, pour tout $A \subset E$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Enfin, si f est continue, alors l'image directe d'un ouvert de E n'est pas forcément un ouvert de F et l'image directe d'un fermé n'est pas forcément un fermé de F .*

Preuve. Exercice 2.5.

1.2. Limites de fonctions.

La notion de limite de fonction en un point est une notion assez voisine de la notion de continuité mais est plus souple car le point peut ne pas appartenir au domaine de définition de la fonction. Nous donnons tout d'abord la définition et nous l'illustrons par la notion de limite à droite et à gauche pour les fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

★ **1.2.1. Définition.** Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Soit $f : D \subset E \rightarrow E'$. Soit $A \subset D$, $x_0 \in \overline{A}$ et $\ell \in E'$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 selon A , et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

1.2.2. Propriété.

- La définition ci-dessus se réécrit aussi

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell), \quad \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \quad f(A \cap V) \subset W.$$

- Si ℓ existe, ℓ est unique et on a $\ell \in \overline{f(A)}$. ℓ est alors appelée la limite de f en x_0 selon A .

Preuve. Exercice 2.6.

1.2.3. Limite usuelle. Si x_0 est un point d'accumulation de D et, si $A = D \setminus \{x_0\}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$ est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x)$.

1.2.4. Limites à gauche et à droite. Soit f une fonction de la variable réelle x définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \overline{I}$. Lorsque $A =]-\infty, a[\cap I$, la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$, si elle existe, est encore notée $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ et appelée *limite à gauche de f en a* . On définit de même la limite à droite de f en a .

★ **1.2.5. Construction de $\overline{\mathbb{R}}$ et limites en $\pm\infty$.** On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Sur $\overline{\mathbb{R}}$, on définit

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(+\infty) = 1, \quad \varphi(-\infty) = -1.$$

On vérifie en exercice (*cf.* Exercice 2.7.) que $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. Cette distance fait de $\overline{\mathbb{R}}$ un espace métrique et nous autorise à parler de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. Evidemment, il n'est pas très commode de manière pratique de caractériser la limite en $\pm\infty$ à l'aide de la distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. On vérifiera en exercice (*cf.* Exercice 2.7) que, si f est définie sur un intervalle $[c, +\infty[$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists C \geq c, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq C \Rightarrow d'(f(x), \ell) \leq \varepsilon.$$

Notons que l'on peut caractériser de la même manière la limite d'une suite en $+\infty$.

- *Limite infinie.* Lorsqu'une fonction f est à valeurs réelles, il est possible de caractériser simplement les limites infinies de f en raisonnant comme si f était à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 selon A si et seulement si

$$\forall C > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad d(x_0, x) < \alpha \Rightarrow f(x) > C.$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = +\infty$. (cf. Exercice 2.7)

- Vous pourrez vérifier en exercice (2.7) que l'on peut caractériser simplement une limite infinie prise à l'infini.

★ **1.2.6. Composition des limites.** Soient $f : D_1 \subset (E, d) \rightarrow (E', d')$ et $g : D_2 \subset (E', d') \rightarrow (E'', d'')$ telles que $f(D_1) \subset D_2$. Soient $A \subset D_1$, $x_0 \in \overline{A}$, $B \subset D_2$ et $y_0 \in \overline{B}$. On suppose que

$$f(A) \subset B, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = y_0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in B}} g(y) = \ell$$

où $\ell \in E''$. Alors l'application composée $h = g \circ f$ vérifie

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} h(x) = \ell.$$

Preuve. Exercice 2.8.

★ **1.2.7. limite et continuité en un point.** Soient $f : D \subset (E, d) \rightarrow (E', d')$ et $x_0 \in D$ un point d'accumulation de E . L'application f est continue en x_0 si et seulement $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Preuve. Exercice 2.9

★ **1.2.8. Remarque.** Lorsque f n'est pas définie en x_0 et lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell$, la fonction g définie sur $D \cup \{x_0\}$ par $g(x) = f(x)$ sur D et $g(x_0) = \ell$ est continue en x_0 et est appelée prolongement par continuité de f en x_0 .

★ **1.2.9. Théorème.** Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques, A une partie de E , $a \in \overline{A}$ et $f : D \subset E \rightarrow F$ une application avec A inclus dans D . f admet une limite au point a selon la partie A si et seulement si, quelle que soit la suite (u_n) de A de limite a , la suite $f(u_n)$ converge. Dans ce cas, la limite de $f(u_n)$ est $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Preuve. En premier lieu, si f possède la limite ℓ en a , alors pour toute suite (u_n) qui converge vers a , la suite $f(u_n)$ converge vers ℓ .

Réciproquement, il n'est pas dit que toutes les suites (u_n) qui convergent vers a , les suites $(f(u_n))$ doivent converger vers la même limite !! Nous commencerons donc par montrer cela. Soient donc (u_n) et (v_n) deux suites de A qui convergent vers a . Les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont alors convergentes par hypothèse, de limites respectives mettons b et b' . Introduisons la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_{2n} = u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} = v_n.$$

Il est clair que (w_n) converge vers a ; à nouveau, $(f(w_n))$ converge mettons vers b'' , mais comme les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ sont extraites de $(f(w_n))$, on a $b = b' = b''$. Soit désormais ℓ la limite commune des suites $(f(u_n))$ lorsque (u_n) converge vers a .

On raisonne maintenant par l'absurde, supposant que ℓ n'est pas limite de f en a . Par les quantificateurs, ceci se traduit par

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in B(a, \delta) \cap A \quad \text{et} \quad f(x) \notin B(\ell, \varepsilon).$$

On prend $\delta = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ pour construire une suite (u_n) de A de limite a telle que la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers ℓ . Ceci est contradictoire, d'où le résultat. $\square$

1.3. Homéomorphismes.

★ **1.3.1. Définition.** Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques. Soit $f : E \rightarrow F$. On dit que f est un *homéomorphisme* si et seulement si f est continue, bijective et f^{-1} est continue.

1.3.2. Remarque. Une fonction peut être bijective et continue sans que f^{-1} le soit nécessairement. Par exemple, si on prend $E = [0, 1[\cup \{2\}$ muni de la distance usuelle, $F = [0, 1]$ muni de la distance usuelle, si on définit $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 2$, alors f est bijective continue de E dans F , mais f^{-1} n'est pas continue en 1. En effet,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f^{-1}(x) = 1 \neq f^{-1}(1) = 2.$$

Néanmoins, nous avons la proposition suivante :

1.3.3. Proposition. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue strictement monotone, alors f est un homéomorphisme de I dans $f(I)$.

Preuve. Rappelons que I est un intervalle si et seulement si pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}$ tels que $x < y < z$, si x et z sont dans I , alors y est dans I .

Supposons f strictement croissante par exemple. Soit y_0 dans $f(I)$ et x_0 dans I tel que $f(x_0) = y_0$. On va montrer que f^{-1} est continue en y_0 . Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in f(I), \quad |y - y_0| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - x_0| \leq \varepsilon.$$

On va supposer que x_0 est un point intérieur à I (le cas où x_0 est un point frontière de I sera analogue). On prend alors $\varepsilon' > 0$ inférieur ou égal à ε suffisamment petit pour que $]x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon'[\subset I$. Comme f est strictement croissante, on a $f(x_0 - \varepsilon') < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon')$. Posons $\alpha = \min(y_0 - f(x_0 - \varepsilon'), f(x_0 + \varepsilon') - y_0)$. Clairement, $\alpha > 0$. Enfin, si $y \in f(I)$ vérifie $|y - y_0| \leq \alpha$, on a alors $f(x_0 - \varepsilon') \leq y \leq f(x_0 + \varepsilon')$, donc $x_0 - \varepsilon' \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon'$ car f^{-1} est croissante (en effet, si $y < y'$ sont dans $f(I)$ et si x, x' sont dans I et vérifient $y = f(x)$, $y' = f(x')$, alors $x \geq x'$ implique $f(x) \geq f(x')$ soit $y \geq y'$ ce qui est absurde). $\square$

1.4. Fonctions uniformément continues et lipschitziennes.

★ **1.4.1. Définition.** Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. On dit que $f : E \rightarrow E'$ est *uniformément continue* si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x, y, \quad d(x, y) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On dit que $f : E \rightarrow E'$ est k -lipschitzienne avec $k \geq 0$ si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \quad d'(f(x), f(y)) \leq k(d(x, y)).$$

★ **1.4.2. Remarque.** Quelle est la différence entre continuité et continuité uniforme ? la voici : dans la définition de la continuité en un point x_0 , le α dépend de x_0 . Dans la définition de la continuité uniforme, ce α ne dépend plus de x_0 . Il est le même quel que soit x_0 dans E . Cette uniformité fait des fonctions uniformément continues des fonctions plus souples d'utilisation que les fonctions continues.

★ **1.4.3. Proposition.**

- Si f est uniformément continue alors f est continue.
- Si f et g sont uniformément continues, alors $f \circ g$ aussi.
- Id_E est uniformément continue.
- Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Preuve. Exercice 2.10.

★ **1.4.4. Proposition.**

- Si A est un sous-ensemble de E , alors d_A la fonction distance à A est 1-lipschitzienne.
- Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, dérivable et à dérivée bornée est lipschitzienne.

Preuve. Exercice 2.11.

1.4.5. Définition. Soit $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ une bijection. On dit que f est un homéomorphisme uniforme si et seulement si f et f^{-1} sont uniformément continues.

1.5. Distances équivalentes.

1.5.1. Définition. Soit E un espace métrique.

- ★ • On dit que deux distances d_1 et d_2 sont *topologiquement équivalentes* et on note $d_1 \stackrel{t}{\sim} d_2$ si et seulement si $Id : (E, d_1) \rightarrow (E, d_2)$ est un homéomorphisme.
- On dit que deux distances d_1 et d_2 sont *uniformément équivalentes* et on note $d_1 \stackrel{u}{\sim} d_2$ si et seulement si $Id : (E, d_1) \rightarrow (E, d_2)$ est un homéomorphisme uniforme.
- Enfin, on dit que deux distances d_1 et d_2 sont *équivalentes* et on note $d_1 \sim d_2$ si et seulement si il existe des constantes $0 < \alpha \leq \beta$ telles que

$$\forall x, y \in E, \quad \alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y).$$

- ★ • De même, si E est un espace vectoriel, deux normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe $0 < \alpha \leq \beta$ telles que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$$

1.5.2. Proposition.

- Deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes.

- Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. Il est donc indifférent, topologiquement parlant, de travailler avec l'une ou l'autre des distances.
- On verra plus loin (cf. chapitre sur la compacité) que dans tous les espaces vectoriels normés de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
- Deux distances équivalentes sont uniformément équivalentes. Deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.
- ★ • $d_1 \sim^t d_2$ si et seulement si $Id : (E, d_1) \rightarrow (E, d_2)$ est continue et $Id : (E, d_2) \rightarrow (E, d_1)$ est continue, soit si et seulement si tout ouvert pour d_2 est ouvert pour d_1 et si tout ouvert pour d_1 est ouvert pour d_2 . En particulier, deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour une distance est convergente vers la même limite pour l'autre distance.
- $d_1 \sim^u d_2$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, $B_{d_1}(x, \alpha_1) \subset B_{d_2}(x, \varepsilon)$ et $B_{d_2}(x, \alpha_2) \subset B_{d_1}(x, \varepsilon)$.

Preuve. Exercice 2.12.

1.6. Applications linéaires continues, normes équivalentes.

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas où $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F , $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F . Nous avons le théorème suivant :

★ **1.6.1. Théorème.** Soit $f \in L(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $f \in \mathcal{L}(E, F)$
- (2) f est continue en un point au moins
- (3) f est continue en 0
- (4) Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$
- (5) f est bornée sur la boule unité fermée
- (6) f est bornée sur la sphère unité
- (7) f est uniformément continue.

Preuve. Nous allons montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (1). Il est clair que (1) $\Rightarrow$ (2), (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) et que (7) $\Rightarrow$ (1).

Montrons que (2) $\Rightarrow$ (3) : Soit f linéaire de E dans F , continue en x_0 . On a donc

$$f(x_0 + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0).$$

Or,

$$f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

et donc f est continue en 0.

Montrons que (3) $\Rightarrow$ (4) : Supposons f continue en 0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_E = \|x - 0\|_E \leq \alpha$ implique $\|f(x)\|_F = \|f(x) - f(0)\|_F \leq \varepsilon$. En particulier, si $x \in E$ est non nul, $\left\| \alpha \frac{x}{\|x\|_E} \right\|_E \leq \alpha$, et donc $\left\| f \left(\alpha \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq \varepsilon$, ce qui implique, comme f est linéaire, que $\|f(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \|x\|_E$.

Il reste à vérifier que (6) $\Rightarrow$ (7). Soit f linéaire de E dans F bornée sur la sphère unité par M . On va montrer que f est M -lipschitzienne. Pour cela, soient x et y dans E . Si $x = y$, alors $\|f(x) - f(y)\|_F = 0 \leq M\|x - y\|_E$. Supposons $x \neq y$. Posons $z = \frac{(x - y)}{\|x - y\|_E}$. z est dans la sphère unité de E , donc $\|f(z)\|_F \leq M$. En particulier, la linéarité de f entraîne $\|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E \|f(z)\|_F \leq M\|x - y\|_E$.

★ **1.6.2. Théorème et définition.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Lorsque $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in B'(0,1)} \|f(x)\|_F.$$

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ dite associée ou subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ sur E .

Preuve. En effet, si $\|f\| = 0$, f est nulle sur la boule unité, donc sur E tout entier par homothétie. Pour le reste, on observe simplement qu'il s'agit de la norme sup sur un espace de fonctions bornées.

★ **1.6.3. Caractérisation.** $\|f\|$ est le plus petit nombre $k \geq 0$ tel que, pour tout x de E , on ait

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

Preuve. Revoyons la preuve du théorème 1.6.1 : il est clair que, $k = \|f\|$ vérifie la condition ci-dessus. D'autre part, l'inégalité $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$, si elle est valable sur E , entraîne que $\|f(x)\|_F$ est bornée par k sur la boule unité. donc par définition : $\|f\| \leq k$.

★ **1.6.4. Proposition.** Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Preuve. En effet, pour tout $x \in E$, on a, par applications successives de la définition 6.6.2 :

$$\|g \circ f(x)\|_G \leq \|g\| \|f(x)\|_F \leq \|g\| \|f\| \|x\|_E.$$

La caractérisation donnée ci-dessus de $\|g \circ f\|$ comme "plus petit nombre tel que ..." amène alors $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$. $\square$

★ **1.6.5. Théorème.** Soit E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes et d_1 et d_2 les distances associées. On a l'équivalence :

- (i) N_1 et N_2 sont équivalentes
- (ii) d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes
- (iii) d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes

Preuve. On a vu que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). (cf. remarque 6.5.2). Il reste à vérifier que (iii) $\Rightarrow$ (i). Or d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si $Id : (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ est un homéomorphisme. Comme Id est linéaire, on a Id qui est continue de (E, N_1) dans (E, N_2) si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leq \alpha N_1$. De

même, Id est continue de (E, N_2) dans (E, N_1) si et seulement si il existe $\beta > 0$ tel que $N_1 \leq \beta N_2$. $\square$

2. Approximation.

★ **2.1. Définition.** Soit X un ensemble, (E, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de X dans E , et $f : X \rightarrow E$.

- On dit que la suite (f_n) converge simplement vers f si et seulement, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, soit si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in X, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

- On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

★ **2.2. Remarque.**

- La différence entre convergence simple et uniforme, est que le rang n_0 est indépendant de x dans le cadre de la convergence uniforme, ce qui n'est pas le cas pour la convergence simple.
- Si une suite de fonctions converge uniformément vers une autre fonction, alors il y a aussi convergence simple.

Preuve. Exercice 2.13.

★ **2.3. Théorème.** Soit (E, d) un espace métrique, X un ensemble. Sur $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E , la convergence uniforme est définie par la distance

$$D(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

En d'autres termes, une suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si

$$D(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Preuve. Exercice 2.14.

★ **2.4. Théorème.** Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Soit (f_n) une suite de fonctions de E dans E' qui converge uniformément vers $f : E \rightarrow E'$.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, alors f est continue.
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est uniformément continue, alors f est uniformément continue.

Preuve. Exercice 2.15. $\square$

★ **2.5. Remarque.** Attention ! Une limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue. Par exemple, si $f_n : [0, 1] \ni x \mapsto x^n$, alors f_n converge simplement vers la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in [0, 1[$ associe 0 et qui à 1 associe 1. Cette fonction n'est pas continue.

Exercices.

Exercices d'apprentissage.

Exercice 2.1. Montrez la proposition 1.1.2

Exercice 2.2. Montrez la proposition 1.1.3

Exercice 2.3. Montrez la proposition 1.1.4

Exercice 2.4. Montrez la proposition 1.1.5

Exercice 2.5. Montrez la proposition 1.1.6

Exercice 2.6. Montrez la proposition 1.2.2

Exercice 2.7. Vérifiez les points non démontrés dans le point 1.2.5.

Exercice 2.8. Montrez la proposition 1.2.6

Exercice 2.9. Montrez la proposition 1.2.7

Exercice 2.10. Montrez la proposition 1.4.3

Exercice 2.11. Montrez la proposition 1.4.4

Exercice 2.12. Montrez la proposition 1.5.2 (sauf le troisième point).

Exercice 2.13. Montrez la remarque 2.2.

Exercice 2.14. Montrez la théorème 2.3.

Exercice 2.15. Montrez la théorème 2.4.

Exercices d'approfondissement.

Exercice 2.16. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue surjective et A une partie dense de E . Montrer que $f(A)$ est dense dans F .

Exercice 2.17. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer les propriétés suivantes :

- i. La diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ est fermée dans $E \times E$.
- ii. Pour tout $x \in E$, l'intersection des voisinages fermés de x est égale à $\{x\}$.
- iii. Les singletons sont fermés dans E et tout ensemble fini est fermé

iv. Si $f, g : E \rightarrow F$ sont deux applications continues de E vers un espace métrique F , alors l'ensemble $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E .

Exercice 2.18. Soit (E, d) un espace métrique.

1. Pour toute partie A non vide de E , montrer que l'application

$$d_A : x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$$

est continue de E dans $\mathbb{R}$.

2. Soient F et G deux fermés disjoints de E . En utilisant les fonctions d_F et d_G , construire une fonction continue f de E dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur F et 1 sur G .

3. En déduire qu'il existe deux suites d'ouverts disjoints $(O_n^1)_n$ et $(O_n^2)_n$ et deux suites de fermés disjoints $(F_n^1)_n$ et $(F_n^2)_n$ telles que :

$$F \subset O_1^1 \subset F_1^1 \subset O_2^1 \subset \dots \subset O_n^1 \subset F_n^1 \subset O_{n+1}^1 \subset \dots$$

et

$$G \subset O_1^2 \subset F_1^2 \subset O_2^2 \subset \dots \subset O_n^2 \subset F_n^2 \subset O_{n+1}^2 \subset \dots$$

Exercice 2.19. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et soit (E, d) l'espace métrique produit muni de la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

1. Montrer que les projections canoniques $\pi_i : E \rightarrow E_i$, $i = 1, 2$ sont ouvertes, c'est-à-dire qu'elles envoient tout ouvert de E en un ouvert de E_i .

2. Montrer sur un exemple que la projection d'un fermé peut ne pas être un fermé.

3. Soient A_1 et A_2 deux parties de E_1 et E_2 respectivement. Montrer que $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

Exercice 2.20. *Continuité uniforme.*

1. Soit $f : (E, d) \rightarrow (F, d')$ une application. Montrez que, si il existe deux suites (x_n) et (y_n) telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) > 0$, alors f n'est pas uniformément continue.

2. Étudier la continuité uniforme des applications suivantes : $f_1 : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x^2 \in \mathbb{R}$, $f_3 :]0, 1[\ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$, $f_4 :]0, 1[\ni x \mapsto \sin \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.21. *Distance discrète.* Soit E un ensemble et δ la distance définie par

$$\delta(x, y) = 0 \text{ si } x = y \text{ et } \delta(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y.$$

1. Montrer que toute application $f : (E, \delta) \rightarrow (F, d)$ où (F, d) est un espace métrique quelconque est continue.

2. Soit d_2 la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

2.1. Montrer que $x \mapsto x$ de $(\mathbb{R}^n, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d)$ est uniformément continue.

2.2. Montrer qu'une bijection de $(\mathbb{R}^n, d) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \delta)$ n'est continue en aucun point.

Exercice 2.22.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uniformément continue. Montrer qu'il existe des constantes a, b positives telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq a|x| + b$$

A-t-on la réciproque ?

Exercice 2.23. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha. \quad (H_\alpha)$$

1. Si $\alpha > 1$, montrer que f est constante.
2. Si $\alpha \leq 1$, montrer que f est uniformément continue. Donner un exemple de fonction non lipschitzienne avec $\alpha < 1$.
3. Trouver f uniformément continue ne vérifiant aucune des conditions H_α . (on admettra qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue).

Exercice 2.24. L'espace $\overline{\mathbb{R}}$. On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soit $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad f(-\infty) = -1, \quad f(+\infty) = 1.$$

Montrer que $d_1(x, y) = |f(x) - f(y)|$ définit une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$. Quelle est la topologie sur $\mathbb{R}$ induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}$? Montrer que $\mathbb{R}$ est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $g : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad g(-\infty) = -1, \quad g(+\infty) = 1.$$

Montrer que $d_2(x, y) = |g(x) - g(y)|$ définit une distance d_2 sur $\overline{\mathbb{R}}$ qui est topologiquement équivalente à la distance d_1 .

Exercice 2.25. Montrer que, sur $\mathbb{R}$, $d_3(x, y) = |x^3 - y^3|$ et la distance usuelle d sont topologiquement équivalentes et non uniformément équivalentes

Exercice 2.26. On reprend l'exercice 1.29

1. Montrer que si l'application f est continue en 0, alors d et $d' = f(d)$ définissent la même topologie et que d et d' sont uniformément équivalentes.
2. Donner un exemple d'espace métrique et d'application f telle que d et $d' = f(d)$ ne définissent pas la même topologie.

Exercice 2.27. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrez que f est continue si et seulement si elle transforme toute suite de limite nulle en une suite bornée.

Exercice 2.28. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé **réel**. Soit f une forme linéaire sur E , c'est à dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $H = \ker f$

1. Montrez que, pour tout $a \in E \setminus H$, on a $H \oplus \mathbb{R}a = E$.
2. Montrez que f est continue si et seulement si son noyau H est fermé dans E (on montrera l'existence d'un $r > 0$ tel que, pour tout $x \in B(0, r)$, on ait $|f(x)| < 1$).
3. Montrez qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé E est soit fermé, soit dense dans E .

Exercice 2.29.

1. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $f \in C([a, b], E)$ et (f_n) une suite de fonctions de $C([a, b], E)$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur $]a, b[$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$.
2. Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f . Montrer que f est un polynôme.

Corrigé des exercices d'apprentissage.

Exercice 2.1. Supposons que

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \quad \exists V' \in \mathcal{V}(x_0), \quad f(V') \subset V.$$

Montrons que f est continue en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$. La boule $B(f(x_0), \varepsilon)$ est un voisinage V de $f(x_0)$. Il existe donc un voisinage V' de x_0 tel que $f(V') \subset V$.

Par définition des voisinages de x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x_0, \alpha) \subset V'$. On a donc bien,

$$\forall x \in E, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Réciproquement, si f est continue en x_0 et si V est un voisinage de $f(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(f(x_0), \varepsilon)$ soit incluse dans V . Comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(B(x_0, \alpha)) \subset V$. On pose $V' = B(x_0, \alpha)$ et le premier point en découle.

Montrons que f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 . Pour cela, il suffit d'utiliser la caractérisation prouvée juste avant, en posant $V' = f^{-1}(V)$.

Pour montrer que Id_E est continue, il suffit de remarquer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in E, \quad d(x, x_0) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad d(Id_E(x), Id_E(x_0)) = d(x, x_0) < \varepsilon.$$

Pour montrer que si g est constante et vaut $b \in E'$, alors g est continue, on remarque que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(g(x), g(x_0)) = d'(b, b) = 0 < \varepsilon.$$

Si x_0 est un point isolé de E , et si V est un voisinage de $f(x_0)$, alors $V' = \{x_0\}$ est un voisinage de x_0 et $f(V') = \{f(x_0)\} \subset V$ ce qui montre que f est continue.

Montrons que la composée de deux fonctions continue est continue. Supposons f continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$. Si V est un voisinage de $g \circ f(x_0)$, comme g est continue en $f(x_0)$, il existe V' un voisinage de $f(x_0)$ tel que $g(V') \subset V$.

Comme f est continue en x_0 , il existe un voisinage V'' de x_0 tel que $f(V'') \subset V'$.

On a alors $g \circ f(V'') = g(f(V'')) \subset g(V') \subset V$, ce qui prouve la continuité de $g \circ f$. Une autre preuve possible était une preuve utilisant par exemple les α et les ε ...

Enfin, si $f : E \rightarrow F$ est continue et si $x_0 \in A$, la continuité de f sur E équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ce qui implique immédiatement que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Si on prend comme espace métrique E l'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, comme fonction f la fonction qui vaut 1 sur $A = [0, 1]$ et 0 ailleurs, on voit que $f|_A$ est continue mais que f n'est pas continue sur E .

Exercice 2.2. On a vu que si f est continue en x_0 , alors $f|_A$ est continue en x_0 . Montrons donc la réciproque.

Supposons donc que $f|_A$ est continue en x_0 et que A est un voisinage de x_0 . Il existe donc α tel que $B(x_0, \alpha) \subset A$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f|_A$ est continue en x_0 , il existe $\alpha' > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha' \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Si on pose $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha')$, alors $B(x_0, \alpha'') \subset B(x_0, \alpha) \cap A$, ce qui montre que

$$\forall x \in E, \quad d(x, x_0) < \alpha'' \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

et prouve que f est continue en x_0 .

Exercice 2.3. Montrons que si f est continue en a et si (x_n) est une suite d'éléments de E qui converge vers a , alors $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a , soit donc $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad d(x, a) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Comme (x_n) converge vers a , il existe un rang n_0 tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, a) < \alpha.$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0, \quad \Rightarrow \quad d'(f(x_n), f(a)) < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite (x_n) qui converge vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Montrons que f est continue en a . Supposons que ce ne soit pas le cas. On en déduit que

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists x \in E, \quad d(x, a) < \alpha \quad \text{et} \quad d'(f(x), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, on en déduit que

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in E, \quad d(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d'(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon.$$

En particulier, la suite (x_n) ainsi construite converge vers a mais $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$ ce qui est absurde.

Exercice 2.4. Montrons que (i) implique (ii). Si U est un ouvert de F , montrons que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E . Il suffit pour cela de montrer que, pour tout x dans $f^{-1}(U)$, il existe $\alpha > 0$ tel que la boule $B(x, \alpha)$ soit incluse dans $f^{-1}(U)$. Soit donc $x \in f^{-1}(U)$. Comme $f(x) \in U$ et que U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset U$. La continuité de f nous donne l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que $f(B(x, \alpha)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset U$, ce qui montre que $B(x, \alpha) \subset f^{-1}(U)$.

Montrons que (ii) implique (iii). On utilise pour cela le fait que si G est un fermé de F , alors $F \setminus G$ est un ouvert. Or $f^{-1}(F \setminus G) = E \setminus f^{-1}(G)$ (en effet, $x \in f^{-1}(F \setminus G) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus G \Leftrightarrow f(x) \notin G \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(G) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(G)$), et donc $f^{-1}(G)$ est fermé.

On montre de la même manière que (iii) implique (ii).

Pour conclure, il suffit de montrer que (ii) implique (i). Soit donc $x \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. La boule $B(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de F donc $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est un ouvert de E d'après (ii). Comme $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, on en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. En particulier, on a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in E, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ce qui prouve (i).

Exercice 2.5. Montrons que si f est continue et si $A \subset E$, alors $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Soit donc $A \subset E$ et $y \in f(\overline{A})$. On veut montrer que $y \in \overline{f(A)}$. Comme $y \in f(\overline{A})$, on en déduit qu'il existe $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. La caractérisation de l'adhérence en termes de suites (théorème 5.4.1) nous montre qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x . Comme f est continue, on en déduit que la suite $f(x_n)$ converge vers $y = f(x)$, ce qui montre bien que $y \in \overline{f(A)}$.

Réciproquement, montrons que si pour toute partie $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, alors f est continue. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe une suite (x_n) qui converge vers un élément a de E telle que $f(x_n)$ ne tende pas vers $f(a)$.

En particulier, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe un $n \geq N$ tel que $d'(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$. On montre comme dans l'exercice 1.44, question 4 qu'on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d'(f(x_{\varphi(n)}), f(a)) > \varepsilon$$

Si $A = \{x_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\}$, alors $\{x_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset \overline{A}$ (on a même l'égalité, mais on n'en a pas besoin ici). Or $f(a)$ n'appartient pas à $\overline{f(A)}$ car $B(f(a), \varepsilon) \cap f(A) = \emptyset$. C'est donc absurde.

Donnons maintenant un exemple d'application continue telle que l'image d'un ouvert par cette application ne soit pas nécessairement un ouvert. On prend par exemple $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$. Alors $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ n'est pas ouvert.

Donnons enfin un exemple d'application continue telle que l'image d'un fermé par cette application ne soit pas nécessairement un fermé. On prend par exemple $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \in \mathbb{R}$. Alors $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ n'est pas fermé.

Exercice 2.6. Montrons que si f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 selon A , alors

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell), \quad \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \quad f(A \cap V) \subset W.$$

Soit $W \in \mathcal{V}(\ell)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\ell, \varepsilon) \subset W$. D'après la définition de la limite, il existe α positif tel que

$$\forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Si on pose $V = B(x_0, \alpha)$, on a bien $f(A \cap V) \subset W$.

Réciproquement, montrons que si

$$\forall W \in \mathcal{V}(\ell), \quad \exists V \in \mathcal{V}(x_0), \quad f(A \cap V) \subset W,$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $W = B(f(\ell), \varepsilon)$. Il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(A \cap V) \subset W$. De plus, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x_0, \alpha) \subset V$. On a donc bien

$$\forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Montrons maintenant que si ℓ existe alors ℓ est unique. Supposons qu'il en existe deux différents, mettons ℓ et ℓ' . Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}d'(\ell, \ell') > 0$. On sait qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha_1 \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon \quad \text{et}$$

$$\forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha_2 \Rightarrow d'(f(x), \ell') < \varepsilon.$$

En particulier, si $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$, on a :

$$\forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \varepsilon \quad \text{et} \quad d'(f(x), \ell') < \varepsilon$$

et donc, pour tout $x \in A$ tel que $d(x, x_0) < \alpha$ (il en existe au moins un car par hypothèse $x_0 \in \overline{A}$), on a $d'(\ell, \ell') \leq d'(f(x), \ell) + d'(f(x), \ell') < \varepsilon + \varepsilon = d'(\ell, \ell')$. C'est absurde.

Montrons que $\ell \in \overline{f(A)}$. Pour cela, on reprend la définition de la limite et on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists \alpha_n > 0, \quad \forall x \in A, d(x, x_0) < \alpha_n \Rightarrow d'(f(x), \ell) < \frac{1}{n}.$$

Comme $x_0 \in \overline{A}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A \cap B(x_0, \alpha_n)$ et que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \in \overline{f(A)}$.

Exercice 2.7. Tout d'abord d définit bien une distance car φ est injective (cf. exercice 1.30). Montrons que f définie sur un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ admet une limite en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C \geq c, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq C \Rightarrow d'(f(x), \ell) \leq \varepsilon.$$

On applique pour cela la définition : f admet la limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in [c, +\infty[, \quad d(x, +\infty) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(x), \ell) \leq \varepsilon.$$

Il est clair qu'on peut supposer que $\alpha < 1$, quitte à prendre un α plus petit. Or $d(x, +\infty) \leq \alpha$ équivaut à $\left| \frac{x}{1+|x|} - 1 \right| \leq \alpha$, ce qui équivaut encore à $\frac{x}{1+|x|} \geq 1 - \alpha$, soit encore à $\frac{x}{1+x} \geq 1 - \alpha$, puis à $x \geq \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Le résultat en découle.

La caractérisation pour les limites infinies est tout à fait analogue, ainsi que pour les limites infinies prises à l'infini.

Exercice 2.8. Soit W un voisinage de ℓ . Il existe un voisinage V de y_0 tel que $g(B \cap V) \subset W$. De même il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(A \cap U) \subset V$. Mais comme $f(A) \subset B$, on a $f(A \cap U) \subset B \cap V$, et donc $g \circ f(A \cap U) \subset W$, ce qui montre d'après la propriété 1.2.2 que $g \circ f$ admet ℓ comme limite en x_0 .

Exercice 2.9. Si f est continue en x_0 , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Et donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D \setminus \{x_0\}, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ce qui implique que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$, et montrons que f est continue en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$. On a donc

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D \setminus \{x_0\}, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Comme $d'(f(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$, on a donc

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \quad d(x, x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ce qui implique que f est continue en x_0 .

Exercice 2.10. Les premier et second points sont clairs.

Pour voir que Id_E est uniformément continue, il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$ dans la définition 1.4.1.

Enfin, si f est k -lipschitzienne, alors il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$ dans la définition de l'uniforme continuité si $k > 0$. Si k est nul, la fonction est constante donc uniformément continue car n'importe quel $\alpha > 0$ convient.

Exercice 2.11. Soient x, y dans E , et $a \in A$. On a

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

En particulier, comme $d_A(x) \leq d(x, a)$, on a $d_A(x) \leq d(x, y) + d(y, a)$, soit encore $d_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a)$, et ceci quel que soit $a \in A$.

En particulier, on obtient $d_A(x) - d(x, y) \leq d_A(y)$, soit encore $d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$.

Renversant les rôles de x et y , on obtient que $d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y)$, ce qui implique donc que

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

d_A est donc bien 1-lipschitzienne.

Si f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si pour tout $u \in I$, $|f'(u)| \leq M$, alors, pour tous x et y dans I , d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

ce qui prouve que f est M -lipschitzienne.

Exercice 2.12. Le premier point est clair.

Le second point découle du quatrième et le troisième point sera prouvé ultérieurement.

Montrons le quatrième point. Si d_1 et d_2 sont équivalentes, il existe des constantes $0 < \alpha \leq \beta$ telles que $\alpha d_2 \leq d_1 \leq \beta d_2$. En particulier, $Id : (E, d_1) \rightarrow (E, d_2)$ est $\frac{1}{\alpha}$ -lipschitzienne donc uniformément continue, et $Id : (E, d_2) \rightarrow (E, d_1)$ est β -lipschitzienne donc uniformément continue.

Il est clair que deux distances uniformément équivalentes sont équivalentes : cela découle du fait que toute fonction uniformément continue est continue.

Le cinquième point est une conséquence claire des propositions 1.1.5 et 1.1.4.

Le sixième point est une conséquence directe de la définition de la continuité uniforme.

Exercice 2.13. C'est clair.

Exercice 2.14. C'est clair.

Exercice 2.15. Montrons le premier point. Le second sera totalement analogue. Soit a un point de E . Montrons que la fonction f est continue en a . Soit $\varepsilon > 0$. Comme f_n converge uniformément vers f , il existe un rang n_0 tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E, \quad n \geq n_0 \Rightarrow d'(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La fonction f_{n_0} est continue. Donc il existe $\alpha > 0$, tel que

$$\forall x \in E, \quad d(x, a) \leq \alpha \Rightarrow d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particulier, pour tout $x \in B(a, \alpha)$, on a :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f(a)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$ et $a \in E$, f est donc bien continue.

Indications et Résultats pour les exercices d'approfondissement.

Exercice 2.16. Raisonner avec les suites

Exercice 2.17.

- i. Montrer que le complémentaire de Δ est ouvert.
- iv. Raisonner avec les suites.

Exercice 2.18.

2. Prendre par exemple $f = d_F / (d_F + d_G)$.

Exercice 2.19.

3. Raisonner avec les suites

Exercice 2.20. Pour f_2 prendre $x_n = \sqrt{2\pi n}$ et $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$.

Exercice 2.22. Si par exemple $x > 0$, relier 0 à x par une suite $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = x$ telle que $|x_{k+1} - x_k| \leq \alpha$. En déduire une majoration de $|f(x) - f(0)|$ en fonction de N puis de x . La procédure est analogue si $x \leq 0$.

Exercice 2.23.

- 1 f est dérivable.
2. Prendre $f = \sqrt{x}$ et montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|y - x|}$.
3. $\frac{1}{\ln x}$ sur $[0, 1]$ par exemple...

Exercice 2.26. Penser aux suites...

Exercice 2.29.

2. Que dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$?