

Exercice 1.

1. Montrons que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Pour cela, on écrit que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{|x|} dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq 2 \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x + k\pi} dx \\ &\geq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty \end{aligned}$$

car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Montrons que la limite de $\int_A^B \frac{\sin x}{x} dx$ existe quand A tend vers $-\infty$ et B tend vers $+\infty$. On écrit que (grâce à une intégration par parties qui est licite puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 et en utilisant le fait que $1 - \cos x$ est une primitive de $\sin x$)

$$\int_A^B \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_A^B + \int_A^B \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

La fonction $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ se prolonge par continuité au voisinage de 0 puisque $g(x) = \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$. De plus, $g(x)$ est inférieure à $\frac{2}{x^2}$ donc la limite quand A tend vers $-\infty$ et B tend vers $+\infty$ de

$$\int_A^B \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

existe et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Comme

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos A}{A} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos B}{B} = 0,$$

on obtient donc bien l'existence de la limite cherchée.

On notera $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ cette limite.

2. Vérifions que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n dx \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dt.$$

On remarque que

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt,$$

et donc

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n \sin x dx \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \int_0^n dx \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dt.$$

Pour tout $t \geq 0$, on pose $F_n(t) = \int_0^n e^{-xt} \sin x dx$. Calculons $F_n(t)$. On intègre par parties :

$$\int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \left[-\frac{1}{t} e^{-xt} \sin x \right]_0^n + \frac{1}{t} \int_0^n e^{-xt} \cos x dx.$$

On intègre encore par parties :

$$\int_0^n e^{-xt} \cos x dx = \left[-\frac{1}{t} e^{-xt} \cos x \right]_0^n - \frac{1}{t} \int_0^n e^{-xt} \sin x dx.$$

En reportant la seconde égalité dans la première, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^n e^{-xt} \sin x dx &= \left[-\frac{1}{t} e^{-xt} \sin x \right]_0^n + \\ &\quad + \frac{1}{t} \left\{ \left[-\frac{1}{t} e^{-xt} \cos x \right]_0^n - \frac{1}{t} \int_0^n e^{-xt} \sin x dx \right\} \\ &= -\frac{e^{-nt} \sin n}{t} + \frac{1 - e^{-nt} \cos n}{t^2} - \frac{1}{t^2} \int_0^n e^{-xt} \sin x dx. \end{aligned}$$

En passant l'intégrale de droite à gauche, on obtient

$$\left(1 + \frac{1}{t^2} \right) F_n(t) = -\frac{e^{-nt} \sin n}{t} + \frac{1 - e^{-nt} \cos n}{t^2}$$

et donc

$$F_n(t) = -\frac{\frac{e^{-nt} \sin n}{t} + \frac{1 - e^{-nt} \cos n}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1 - e^{-nt} \cos n + te^{-nt} \sin n}{1 + t^2}.$$

Déterminons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t).$$

Si $t > 0$ alors $(\cos n)_n$ et $(\sin n)_n$ sont bornées et e^{-nt} tend vers 0 donc, pour $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Déduisons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

On remarque que, si n est fixé,

$$\int_{x=0}^n \int_{t=0}^{\infty} e^{-xt} |\sin x| dt dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx < +\infty.$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx &= \int_{x=0}^n \int_{t=0}^{\infty} e^{-xt} \sin x dt dx = \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{x=0}^n e^{-xt} \sin x dx dt = \int_0^{\infty} F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Or F_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. De plus, pour $n \geq 1$,

$$|F_n(t)| \leq \left| \frac{1 - e^{-nt} \cos n + te^{-nt} \sin n}{1 + t^2} \right| \leq \frac{1 + 1 + te^{-t}}{1 + t^2} = \frac{2 + te^{-t}}{1 + t^2}.$$

La fonction $t \mapsto te^{-t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ donc est bornée, mettons par M . On a alors

$$|F_n(t)| \leq \frac{M + 2}{1 + t^2}$$

et donc $F_n(t)$ est bornée, pour $n \geq 1$ par $t \mapsto \frac{M+2}{1+t^2}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$. On en déduit que le théorème de la convergence dominée s'applique et que

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} F_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

3. Soit $f_n(x) = \frac{\sin nx}{x}$. Montrons que f_n définit une distribution sur $\mathbb{R}$. L'application f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n$. Donc elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Montrons que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \pi \varphi(0).$$

Si $A, B \in \mathbb{R}$ sont tels que le support de φ est inclus dans $]A, B[$, alors

$$\frac{\sin nx}{x} \varphi(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_A^B \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx.$$

Or

$$\int_A^B \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx = \int_A^B \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \varphi(0) \int_A^B \frac{\sin nx}{x} dx$$

et, en posant $u = nx$,

$$\int_A^B \frac{\sin nx}{x} dx = \int_{nA}^{nB} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{A \rightarrow -\infty, B \rightarrow +\infty} \pi.$$

On montre comme dans la question 1 que la limite quand $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$ de

$$\int_A^B \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$$

existe et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx,$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \pi \varphi(0).$$

Déduisons la limite de f_n au sens des distributions quand n tend vers $+\infty$. On va montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui permettra d'en déduire que

$$\langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi \varphi(0)$$

et donc que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi \delta_0$. Pour cela, on écrit que, en intégrant par parties comme dans la question 1,

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ \left[\left(\frac{1 - \cos nx}{n} \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right]_A^B - \int_A^B \left(\frac{1 - \cos nx}{n} \right) \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right)' dx. \end{aligned}$$

La limite du terme entre crochets quand $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$ existe et vaut 0 (car φ est à support compact donc borné en valeur absolue par M_0 et donc

$$\left| \left(\frac{1 - \cos nx}{n} \right) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \leq \frac{2}{n} \left(\frac{M_0 + |\varphi(0)|}{|x|} \right) \leq \frac{4M_0}{n|x|}.$$

Le terme

$$\int_A^B \left(\frac{1 - \cos nx}{n} \right) \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right)' dx$$

vaut quant à lui

$$\int_A^B \left(\frac{1 - \cos nx}{n} \right) \left(\frac{x\varphi'(x) - \varphi(x) + \varphi(0)}{x^2} \right) dx.$$

Posons $u = nx$ dans cette dernière intégrale, on obtient qu'elle est égale à

$$\int_{nA}^{nB} \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) \left(\frac{u}{n} \varphi' \left(\frac{u}{n} \right) - \varphi \left(\frac{u}{n} \right) + \varphi(0) \right) du.$$

L'application $u \mapsto \frac{u}{n} \varphi' \left(\frac{u}{n} \right) - \varphi \left(\frac{u}{n} \right) + \varphi(0)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car φ est à support compact. Comme $u \mapsto \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit par application du théorème de la convergence dominée que la limite que $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$ de la dernière intégrale est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) \left(\frac{u}{n} \varphi' \left(\frac{u}{n} \right) - \varphi \left(\frac{u}{n} \right) + \varphi(0) \right) du,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) \left(\frac{u}{n} \varphi' \left(\frac{u}{n} \right) - \varphi \left(\frac{u}{n} \right) + \varphi(0) \right) du. \end{aligned}$$

Si on suppose que $A > 0$ est tel que le support de φ est inclus dans $] - A, A[$ et si on note $M_1 = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|$, on a

$$\left| \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) \left(\frac{u}{n} \varphi' \left(\frac{u}{n} \right) - \varphi \left(\frac{u}{n} \right) + \varphi(0) \right) \right| \leq \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) (AM_1 + 2M_0)$$

et $u \mapsto \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) (AM_1 + 2M_0)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme la suite de fonctions $u \mapsto \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) \left(\frac{u}{n} \varphi' \left(\frac{u}{n} \right) - \varphi \left(\frac{u}{n} \right) + \varphi(0) \right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers 0, on déduit du théorème de la convergence dominée que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos u}{u^2} \right) \left(\frac{u}{n} \varphi' \left(\frac{u}{n} \right) - \varphi \left(\frac{u}{n} \right) + \varphi(0) \right) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où le résultat.

Exercice 2.

1. Rappelons la définition du produit d'une fonction f de classe C^∞ avec une distribution T . On appelle fT la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle.$$

2. Montrons qu'on ne peut pas étendre ce produit en un produit sur l'espace des distributions qui soit commutatif et associatif. en supposant qu'un tel produit existe et en calculant de deux manières différentes le produit $x\delta_0 vp\left[\frac{1}{x}\right]$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Calculons $x\delta_0$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle x\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, x\varphi \rangle = 0 \times \varphi(0) = 0$ donc $x\delta_0 = 0$. En particulier, s'il existe un produit associatif,

$$x\delta_0 vp\left[\frac{1}{x}\right] = (x\delta_0)vp\left[\frac{1}{x}\right] = 0vp\left[\frac{1}{x}\right] = 0.$$

Calculons $xvp\left[\frac{1}{x}\right]$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle xvp\left[\frac{1}{x}\right], \varphi \rangle &= \langle vp\left[\frac{1}{x}\right], x\varphi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc $xvp\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. En particulier, s'il existe un produit commutatif,

$$x\delta_0 vp\left[\frac{1}{x}\right] = \delta_0 xvp\left[\frac{1}{x}\right] = \delta_0 \left(xvp\left[\frac{1}{x}\right]\right) = \delta_0 \times 1 = \delta_0.$$

Ceci est contradictoire.

Exercice 3. Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$.

1. Calculons $(x^2T)'$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle (x^2T)', \varphi \rangle &= -\langle x^2T, \varphi' \rangle = -\langle T, x^2\varphi' \rangle = -\langle T, (x^2\varphi)' \rangle + \langle T, 2x\varphi \rangle = \\ &= \langle T', x^2\varphi \rangle + \langle 2xT, \varphi \rangle = \langle x^2T' + 2xT, \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc $(x^2T)' = x^2T' + 2xT$.

2. Trouvons toutes les solutions de l'équation

$$x^2T' + 2xT = 0.$$

Si on pose $x^2T = U$ alors $U' = 0$. Résolvons l'équation $U' = 0$. Pour cela, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Posons

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(u) du - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du \right) \psi(t)$$

où $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\psi(t) = \int_{-\infty}^t \theta(u) du / \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) du$. Si $A > 0$ est tel que $\text{supp } \theta$ et $\text{supp } \varphi$ sont dans $[-A, A]$, alors pour $t < -A$, $\phi(t) = 0$ et pour $t > A$, $\phi(t) = 0$ ce qui montre que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle U', \phi \rangle = 0 = -\langle U, \phi' \rangle = -\langle U, \varphi \rangle + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) du} \langle U, \theta \rangle$$

donc

$$\langle U, \varphi \rangle = \langle C, \varphi \rangle$$

avec $C = \frac{\langle U, \theta \rangle}{\int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) du}$ ce qui montre que $U = C$ est une distribution constante (c'est à dire une distribution attachée à une fonction constante). On en déduit que $x^2T = C$.

Posons $T_0 = -C \left(\text{vp} \left[\frac{1}{x} \right] \right)'$ et montrons que $x^2T_0 = C$ (cette définition de T_0 est motivée par le fait que, formellement, la dérivée de $-\frac{C}{x}$ est $\frac{C}{x^2}$). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle x^2T_0, \varphi \rangle &= \langle T_0, x^2\varphi \rangle = \left\langle -C \left(\text{vp} \left[\frac{1}{x} \right] \right)', x^2\varphi \right\rangle = C \left\langle \text{vp} \left[\frac{1}{x} \right], (x^2\varphi)' \right\rangle \\ &= C \left\langle \text{vp} \left[\frac{1}{x} \right], 2x\varphi + x^2\varphi' \right\rangle \\ &= C \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{2x\varphi(x)}{x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x^2\varphi'(x)}{x} dx \right) \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}} 2\varphi(x) dx + \int_{\mathbb{R}} x\varphi'(x) dx \right) \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}} 2\varphi(x) dx + [x\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right) = C \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que $x^2T_0 = C$.

En particulier si T vérifie $x^2T = C$ alors $x^2(T - T_0) = 0$. Il reste pour conclure à trouver les distributions S telles que $x^2S = 0$. On

aura alors $T = T_0 + S$. Pour cela, on procède comme pour l'exercice 2.11. Si $\varphi, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\theta = 1$ au voisinage de 0, on va montrer que $\varphi(x) - (\varphi(0) + \varphi'(0)x)\theta(x)$ est de la forme $x^2\psi(x)$ avec $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En effet, la fonction $f(x) = \varphi(x) - (\varphi(0) + \varphi'(0)x)\theta(x)$ est de classe C^∞ et vérifie $f(0) = f'(0) = 0$. On a donc

$$f(x) = \int_0^x (x-t)f''(t)dt = x^2 \int_0^1 (1-u)f''(xu)du$$

grâce au changement de variables $t = xu$. La même preuve que pour l'exercice 2.11 montre que la fonction $\psi(x) = \int_0^1 (1-u)f''(xu)du$ est de classe C^∞ et à support compact. En particulier, on obtient donc

$$\begin{aligned} \langle S, \varphi \rangle &= \langle S, \varphi(x) - (\varphi(0) + \varphi'(0)x)\theta(x) \rangle + \langle S, (\varphi(0) + \varphi'(0)x)\theta(x) \rangle \\ &= \underbrace{\langle S, x^2\psi(x) \rangle}_{=0} + \varphi(0)\langle S, \theta \rangle + \varphi'(0)\langle S, x\theta \rangle = \alpha\varphi(0) + \beta\varphi'(0) \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et donc $S = \alpha\delta_0 - \beta\delta'_0$.

On en déduit que les solutions de l'équation proposée sont les distributions de la forme

$$T = C_0 \left(\text{vp} \left[\frac{1}{x} \right] \right)' + C_1\delta_0 + C_2\delta'_0$$

où C_0, C_1 et C_2 sont des constantes.

Exercice 4. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans le compact K .

1.a. Montrons que T définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a$$

définit bien une distribution, et en particulier que si $a' \geq a$, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_0^{a'} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a'.$$

Déterminons aussi son ordre et son support.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx &= [(\varphi(x) - \varphi(0)) \ln x]_{\varepsilon}^a - \int_{\varepsilon}^a \varphi'(x) \ln x dx \\ &= -\varphi(0) \ln a - (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) \ln \varepsilon - \int_{\varepsilon}^a \varphi'(x) \ln x dx. \end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, comme φ est dérivable à l'origine, on a $(\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) \sim \varphi'(0)\varepsilon$ et donc $(\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) \ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. On en déduit que

$$\langle T, \varphi \rangle = - \int_0^a \varphi'(x) \ln x dx.$$

ce qui montre que $T = (\chi_{[0,+\infty[} \ln |x|)'$ (où $\chi_{[0,+\infty[}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, +\infty[$) est une distribution d'ordre exactement 1, ayant pour support $\mathbb{R}^+$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = \int_0^{a'} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \ln a'$$

pour $a' \geq a$.

1.b. Calculons xT' . On a $xT' = (xT)' - T$ (cela se prouve comme pour la question 1 de l'exercice 3). Calculons xT . Soit $\varphi \in \mathcal{D}_{[-a,a]}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} \langle xT, \varphi \rangle &= \langle T, x\varphi \rangle = \int_0^a \frac{x\varphi(x) - 0 \times \varphi(0)}{x} dx + 0 \times \varphi(0) \ln a = \int_0^a \varphi(x) dx \\ &= \langle \chi_{[0,+\infty[}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc $xT = \chi_{[0,+\infty[}$. Comme $\chi'_{[0,+\infty[} = \delta_0$ (en effet pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $-\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,+\infty[} \varphi'(x) dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0)$), on en déduit que

$$xT' = \delta_0 - T.$$

1.c. Déterminons une primitive de T . On a vu que $T = (\chi_{[0,+\infty[} \ln |x|)'$ et donc une primitive de T est $\chi_{[0,+\infty[} \ln |x|$.

2.a. Trouver une distribution S dans $\mathcal{D}'^+$ (espace des distributions dont le support est inclus dans $[0, +\infty[$) telle que

$$xS' + S = \delta_0. \quad (E)$$

Il est clair que T vérifie l'équation (E) .

- 2.b.** *Trouvons la solution générale de (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'^+$. Il suffit pour cela d'ajouter à la solution particulière T trouvée la solution générale de l'équation*

$$xS' + S = 0$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{D}'^+(\mathbb{R})$. Si $xS' + S = 0$ alors $(xS)' = 0$ et donc $xS = \text{Constante}$ ce qui entraîne que $S = C \text{vp} \left[\frac{1}{x} \right] + C'\delta_0$ (d'après tout ce qui a été vu dans l'exercice 3). On a $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enfin, $S \in \mathcal{D}'^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $C = 0$. On obtient que les solutions de (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont de la forme $T + C \text{vp} \left[\frac{1}{x} \right] + C'\delta_0$ et que les solutions de (E) dans $\mathcal{D}'^+(\mathbb{R})$ sont de la forme $T + C'\delta_0$.