Solutions des exercices.

Exercice 2.1. *Montrons que si T est une distribution et si (φ_j) est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers 0, la suite $\langle T, \varphi_j \rangle$ tend vers 0.* Si la suite (φ_j) tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe K tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, supp $\varphi_j \subset K$ et tel que φ_j ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 uniformément dans K. Si T est une distribution alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$|\langle T, \varphi_j \rangle| \leq C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j| \longrightarrow_{j \to +\infty} 0.$$

Montrons maintenant que si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\langle T, \varphi_j \rangle \to 0$ pour toute suite φ_j de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui tend vers 0, alors T est une distribution. Supposons que T ne soit pas une distribution. Il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $C > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tel que

$$|\langle T, \varphi \rangle| > C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

En particulier, si on pose pour $j \in \mathbb{N}^*$, $N = C = j$ et si on pose

$$\varphi_j = \frac{\varphi}{C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|}$$

où la fonction φ est la fonction précédemment définie, on a $|\langle T, \varphi_j \rangle| > 1$ et (φ_j) tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (toutes les fonctions φ_j ont leur support inclus dans K et toutes les dérivées partielles sont majorées sur K par $1/C = 1/j$ qui tend vers 0). C'est absurde.

Exercice 2.2. Si $K \subset\subset \Omega$, on a deux cas. Premier cas : $a \in K$ alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup_K |\varphi|$. Deuxième cas : $a \notin K$ alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $\varphi(a) = 0$ et donc $|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = 0 \leq \sup_K |\varphi|$.

Exercice 2.3. Si K est un compact et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ alors

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \left(\sup_K |\varphi| \right) \int_K |f|,$$

ce qui prouve bien que T est une distribution.

Exercice 2.4. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, $A > 0$ tel que $K \subset]-A, A[$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Intégrons par parties ; nous obtenons :

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon - \varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_{-A}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\ln|x|dx - \int_{\varepsilon}^{A} \varphi'(x)\ln|x|dx$$

car $\varphi(A) = \varphi(-A) = 0$. La fonction $\mathbb{R}_*^+ \ni x \mapsto \ln|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\int_{\varepsilon}^{1} |\ln x| dx = \varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon + 1 \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 1.$$

Il en découle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\ln|x|dx + \int_{\varepsilon}^{A} \varphi'(x)\ln|x|dx\right)$$

existe et vaut

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\ln|x|dx.$$

Comme φ est C^1, on a $\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) = -2\varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon)$ au voisinage de 0 donc $(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon))\ln\varepsilon \sim -2\varepsilon\varphi'(0)\ln\varepsilon \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 0$, en particulier on a bien l'existence de

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle$$

et

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \qquad |\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle| = \left|-\int_K \varphi'(x)\ln|x|dx\right| \le \sup_K |\varphi'| \int_K |\ln|x||dx.$$

ce qui prouve que $vp(\frac{1}{x})$ est bien une distibution.

Exercice 2.5. Supposons qu'il existe une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Soit θ une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\theta(0) = 1$. Posons $\varphi_N(x) = \theta(N(x-a))$. On a supp $\varphi_N = a + \frac{1}{N}$supp θ, donc à partir d'un certain rang, supp $\varphi_N \subset \Omega$. On a alors $\langle\delta_a, \varphi_N\rangle = \varphi_N(a) = 1$ et $\langle T_f, \varphi_N\rangle = \int_\Omega f\varphi_N$. Or si K est un compact de Ω voisinage de a, il existe un rang M à partir duquel, pour tout $N \geq M$, on ait supp $\varphi_N \subset K$, ce qui implique que, pour tout $N \geq M$, $|f\varphi_N| \leq |f|\|\theta\|_\infty \mathbb{1}_K \in L^1(\Omega)$ car $f \in L^1_{loc}$. La suite de fonctions $f\varphi_N$ tend simplement vers 0 presque partout. Il découle du théorème de la convergence dominée que $\langle T_f, \varphi_N \rangle \longrightarrow_{N\to+\infty} 0$ ce qui est contradictoire.

Exercice 2.6. C'est un corollaire immédiat du théorème de représentation de Riesz.

Exercice 2.7. On a vu que si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \qquad |\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle| = \left| -\int_K \varphi'(x) \ln|x| dx \right| \leq \sup_K |\varphi'| \int_K |\ln|x|| dx.$$

Ceci montre que $vp(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1. Supposons que $vp(\frac{1}{x})$ ne soit pas une distribution d'ordre exactement 1, mais d'ordre 0. On en déduit que, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}), \qquad |\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle| \leq C \sup_K |\varphi|.$$

On prend alors $K = [0, 2]$ et $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui valent 1 sur $[\frac{1}{j}, 1]$ telles que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2j}, 2]$. On a alors

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi_j \rangle \geq \int_{\frac{1}{j}}^1 \frac{dx}{x} = \ln j$$

et $\sup_K |\varphi| = 1$. Ceci contredit l'existence de la constante C précédente et prouve bien que $vp(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre exactement égal à 1.

Exercice 2.8. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Supposons supp $\varphi \subset]-A, A[$, ce qui implique en particulier que $\varphi(-A) = \varphi(A) = 0$. En intégrant par parties, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(jx)\varphi(x) dx = \int_{-A}^{+A} \cos(jx)\varphi(x) dx$$
$$= \left[\frac{1}{j}\sin(jx)\varphi(x)\right]_{-A}^{+A} - \frac{1}{j}\int_{-A}^{A} \sin(jx)\varphi'(x) dx = -\frac{1}{j}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(jx)\varphi'(x) dx.$$

Donc

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(jx)\varphi(x) dx \right| \leq \frac{1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'(x)| dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui prouve bien que $\cos jx$ tend vers 0 au sens des distributions.

Exercice 2.9. Soit K un compact de Ω. Soient N et C tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

Si $g \in C^\infty(\Omega)$, on a alors grâce à la formule de Leibniz (Exercice 1.2), pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,

$$\partial^\alpha(g\varphi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta g)(\partial^{\alpha-\beta}\varphi).$$

En particulier, pour $|\alpha| \leq N$,

$$\begin{aligned}\sup_K |\partial^\alpha(g\varphi)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\sup_K |\partial^\beta g|\right)\left(\sup_K |\partial^{\alpha-\beta}\varphi|\right)\\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\sup_K \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\|\gamma|\leq N}} |\partial^\gamma g|\right)\left(\sup_K | \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\|\gamma|\leq N}} \partial^\gamma\varphi|\right)\end{aligned}$$

donc

$$\sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\leq N}} \sup_K |\partial^\alpha(g\varphi)| \leq \left(\sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\leq N}} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\right)\left(\sup_K \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\|\gamma|\leq N}} |\partial^\gamma g|\right)\left(\sup_K | \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\|\gamma|\leq N}} \partial^\gamma\varphi|\right)$$

et

$$\begin{aligned}|\langle gT, \varphi\rangle| &= |\langle T, g\varphi\rangle|\\ &\leq C\left[\left(\sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\|\alpha|\leq N}} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\right)\left(\sup_K \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\|\gamma|\leq N}} |\partial^\gamma g|\right)\right]\left(\sup_K | \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\|\gamma|\leq N}} \partial^\gamma\varphi|\right)\end{aligned}$$

ce qui montre bien que gT est une distribution.

Exercice 2.10. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\langle x\, vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x\varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\varphi(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \langle 1, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

donc $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.

Exercice 2.11. On suit l'indication proposée. La fonction $f(x) = \varphi(x) - \theta(x)$ est de classe C^1 et vérifie $f(0) = 0$. Donc

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = x \int_0^1 f'(xu)du$$

grâce au changement de variable $t = xu$. Le théorème de dérivation sous le signe somme montre que

$$\psi(x) = \int_0^1 f'(xu)du$$

est de classe C^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi^{(k)}(x) = \int_0^1 u^k f^{(k+1)}(xu)du.$$

En effet, cela découle du fait que, si M_k est un majorant de $|f^{(k)}|$ sur $\mathbb{R}$ (qui existe car f est à support compact et qu'il en est donc de même pour les dérivées de f), alors

$$|u^k f^{(k+1)}(xu)| \leq M_{k+1} u^k$$

qui est intégrable sur $[0, 1]$. Il reste à vérifier que ψ est à support compact : si $x \in \mathbb{R}$ et si $x \notin$ supp $\varphi \cup$ supp $\theta \cup \{0\}$, alors $\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x) = x\psi(x) = 0$ car $\varphi(x) = \theta(x) = 0$, ce qui implique que $\psi(x) = 0$ car $x \neq 0$. On a donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et supp $\psi \subset$ supp $\varphi \cup$ supp $\theta \cup \{0\}$.

Nous avons donc,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x) \rangle = \varphi(0)\langle T, \theta \rangle + \langle xT, \psi(x) \rangle = \varphi(0)\langle T, \theta \rangle$$

car $xT = 0$, et donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \theta \rangle \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

ce qui prouve que $T = c\delta_0$ avec $c = \langle T, \theta \rangle \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.12. La propriété énoncée est vraie si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (par récurrence sur l'entier α). Elle est donc vraie si Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$. En effet, tout ouvert de Ω de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles disjoints. Il suffit pour cela de considérer la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Ω définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert $I_{x,y}$ contenant x et y et inclus dans Ω. On vérifie aisément que c'est bien une relation d'équivalence. On remarque ensuite que les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts (en fait la classe d'équivalence de x est la composante connexe de Ω contenant x). Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que chaque classe d'équivalence contient au moins un rationnel (par densité de $\mathbb{Q}$), on en déduit que l'ensemble des classes d'équivalences est donc au plus dénombrable et donc que Ω est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Si maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on en déduit que supp φ est inclus dans une réunion finie d'intervalles ouverts disjoints $I_1, \dots I_N$ (par compacité de supp φ) de Ω et donc que

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = \sum_{i=1}^N \int_{I_i} (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^\alpha \sum_{i=1}^N \int_{I_i} f(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^\alpha \int_\Omega f(\partial^\alpha \varphi),$$

et donc la propriété est vraie quel que soit l'ouvert Ω de $\mathbb{R}$.

On raisonne maintenant par récurrence sur la dimension n de $\mathbb{R}^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Supposons que cela soit vrai au rang $n-1$. Si maintenant Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x' \in \Omega_{x_1}} (\partial_1^{\alpha_1} \partial_{x'}^{\alpha'} f)\varphi$$

où on a noté $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x')$ avec $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $\alpha' = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et où $\Omega_{x_1} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ (x_1, x') \in \Omega\}$ qui est ouvert car Ω_{x_1} est l'image réciproque par l'application continue $\mathbb{R}^{n-1} \ni x' \mapsto (x_1, x') \in \mathbb{R}^n$ de Ω. On a alors

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = \int_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{x' \in \Omega_{x_1}} \partial_{x'}^{\alpha'} (\partial_1^{\alpha_1} f)\varphi.$$

L'hypothèse de récurrence nous donne

$$\int_{x' \in \Omega_{x_1}} \partial_{x'}^{\alpha'} (\partial_1^{\alpha_1} f)\varphi = (-1)^{|\alpha'|} \int_{x' \in \Omega_{x_1}} (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'} \varphi)$$

et donc

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha'|} \int_\Omega (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'} \varphi).$$

Le même raisonnement mais en tranchant par rapport à x' nous donne

$$\int_\Omega (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'} \varphi) = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} \int_{\Omega^{x'}} (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'} \varphi)$$

où $\Omega^{x'}$ est l'ouvert de $\mathbb{R}$ défini par $\Omega^{x'} = \{x_1 \in \mathbb{R},\ (x_1, x') \in \Omega\}$. En particulier,

$$\int_{\Omega^{x'}} (\partial_1^{\alpha_1} f)(\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi) = (-1)^{\alpha_1} \int_{\Omega^{x'}} f(\partial_1^{\alpha_1}\partial_{x'}^{\alpha'}\varphi)$$

donc

$$\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(\partial^\alpha \varphi)$$

et termine l'exercice.

Exercice 2.13. Soit K un compact de Ω. Comme T est une distribution, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \qquad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|\leq N}} \sup_K |\partial^\beta \varphi|.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \qquad |\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle| = |\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle| &\leq C \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|\leq N}} \sup_K |\partial^{\beta+\alpha}\varphi| \\ &\leq C \sup_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n \\ |\beta|\leq N+|\alpha|}} \sup_K |\partial^\beta \varphi|.\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $\partial^\alpha T$ est une distribution sur Ω.

Exercice 2.14. On a vu dans l'exercice 2.4 que $\ln|x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ donc définit une distribution et que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = -\langle \ln|x|, \varphi'\rangle$$

et donc $(\ln|x|)' = vp(\frac{1}{x})$ au sens des distributions.

Exercice 2.15. Il suffit de montrer que si une suite de distributions T_n tend vers 0 alors, $\partial^\alpha T_n$ tend vers 0. Or T_n tend vers 0 si et seulement si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow 0$. En particulier, comme pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle \partial^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \partial^\alpha\varphi\rangle \longrightarrow 0$, le résultat en découle.

Exercice 2.16.

1. Si on le montre pour la dérivation par rapport à x_1, le résultat se prouvera de manière analogue pour les dérivations par rapport aux autres x_j.

2. **a.** On a

$$-\int_{\Omega} f(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}dx = -\int_{]a_2,b_2[\times\cdots\times]a_n,b_n[}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\times \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\right)dx_2\cdots dx_n$$

Prouvons maintenant que si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ telle que $u' \in L^1_{loc}(]a,b[)$ et $v \in \mathcal{D}(]a,b[)$ alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = -\int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Cela découle du fait que si w est une fonction dérivable sur $]a,b[$ dont la dérivée est intégrable sur tout compact $[c,d] \subset]a,b[$ alors $w(d)-w(c) = \int_c^d w'(t)dt$. Attention : cette égalité n'est pas triviale car w' n'est pas continue ! Il s'agit d'un théorème dû à Lebesgue et nous renvoyons le lecteur à un ouvrage d'intégration ou par exemple à l'ouvrage de W. Rudin, “Analyse réelle et complexe”, Masson, page 161, théorème 8.21. En particulier, appliquant cela la fonction $w = uv$ sur un intervalle $[c,d]$ tel que supp $v \subset]c,d[$ nous obtenons

$$0 = u(d)v(d) - u(c)v(c) = \int_c^d (u'v + vu')$$

donc

$$\int_a^b u'v = \int_c^d u'v = -\int_c^d uv' = -\int_a^b uv'.$$

Revenant à l'intégrale initiale, nous avons donc

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1 = -\int_{a_1}^{b_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1$$

d'où le résultat demandé.

b. La compacité du support de φ entraîne le résultat.

c. On prend une partition de l'unité adaptée à la famille de parallélépipèdes $P_1,\ldots,P_N$ précédente, c'est-à-dire qu'on prend des fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ telles que supp $\varphi_i \subset P_i$ et telles que $\varphi_1+\cdots+\varphi_N \equiv$

1 sur supp φ. On a alors

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega f(x)\frac{\partial(\varphi\varphi_i)}{\partial x_1}dx = \\ -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(\varphi\varphi_i)(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx$$

d'où le résultat.

Exercice 2.17. Pour montrer que la fonction $\frac{1}{\pi z}$ définit bien une distribution, il suffit de montrer qu'elle est localement intégrable sur $\mathbb{C}$. Comme cette fonction est continue sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, elle est donc localement intégrable sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pour conclure, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur tout voisinage compact de 0, et donc il suffit de montrer que pour tout $R>0$, $\int_{|z|\leq R}\frac{dxdy}{|z|}<+\infty$. Pour cela, on passe en coordonnées polaires :

$$\int_{|z|\leq R}\frac{dxdy}{|z|} = 2\pi\int_0^R \frac{r\,dr}{r} = 2\pi R < +\infty$$

ce qui montre bien que $\frac{1}{\pi z}$ définit bien une distribution T.

Le théorème de la convergence dominée montre maintenant que T_n tend vers T. En effet, si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{C})$, la suite de fonctions $\frac{\bar z}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\varphi(z)$ converge simplement vers $\frac{\varphi(z)}{z}$ et est majorée en module par $\frac{|\varphi(z)|}{|z|}$ qui est intégrable car $\frac{1}{z}$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}$. Et donc

$$\int_{\mathbb{C}}\frac{\bar z}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\varphi(z)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{C}}\frac{\varphi(z)}{z}$$

ce qui montre bien que $T_n\to T$.

La continuité des opérateurs de dérivations partielles (proposition 5.2.) montre que $\frac{\partial}{\partial\bar z}T_n \to \frac{\partial}{\partial\bar z}T$. Pour calculer $\frac{\partial}{\partial\bar z}T$, il suffit donc de calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{\partial}{\partial\bar z}T_n$. La distribution T_n étant associée à une fonction C^∞, la distribution $\frac{\partial}{\partial\bar z}T_n$ est donc la distribution associée à la fonction $\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\bar z}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\right)$. On a

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{\bar z}{|z|^2+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{|z|^2+\frac{1}{n^2}} + \bar z\frac{(-z)}{(|z|^2+\frac{1}{n^2})^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{(|z|^2+\frac{1}{n^2})^2}$$

donc, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$, on a

$$\langle \frac{\partial T_n}{\partial \bar{z}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{n^2}}{(|z|^2 + \frac{1}{n^2})^2} \varphi(z) dm(z),$$

où $dm(z)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. Posons $z = \frac{w}{n}$ dans cette intégrale, nous obtenons

$$\langle \frac{\partial T_n}{\partial \bar{z}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(|w|^2 + 1)^2} \varphi(\frac{w}{n}) dm(w).$$

Si M est un majorant de $|\varphi|$ alors

$$\left| \frac{1}{(|w|^2 + 1)^2} \varphi(\frac{w}{n}) \right| \leq \frac{M}{(|w|^2 + 1)^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{C}$ car, en passant en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{dm(w)}{(|w|^2 + 1)^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r\, dr}{(r^2 + 1)^2} = \pi \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u + 1)^2} = \pi < +\infty.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, comme

$$\frac{1}{(|w|^2 + 1)^2} \varphi(\frac{w}{n})$$

tend simplement vers

$$\frac{1}{(|w|^2 + 1)^2} \varphi(0),$$

on en déduit que

$$\langle \frac{\partial T_n}{\partial \bar{z}}, \varphi \rangle \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(|w|^2 + 1)^2} \varphi(0) dm(w) = \varphi(0) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{dm(w)}{(|w|^2 + 1)^2} = \varphi(0)$$

d'après le calcul fait précédemment. Et donc $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = \delta_0$.

Exercice 2.18.

1. $\Omega \setminus \{a\}$ est un ouvert d'annulation de δ_a. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{a\})$, alors supp φ est un compact de $\Omega \setminus \{a\}$ et donc $\varphi(a) = 0$, ce qui implique que $\langle \delta_a, \varphi \rangle = 0$. Si maintenant $\Omega \setminus \{a\}$ n'est pas le plus grand ouvert d'annulation de δ_a, alors Ω est le plus grand ouvert d'annulation de δ_a, ce qui veut dire que $\delta_a = 0$, ce qui est absurde. On en déduit que le plus grand ouvert d'annulation de δ_a est $\Omega \setminus \{a\}$ et donc que supp $\delta_a = \{a\}$.

2. Il suffit de montrer qu'un ouvert d'annulation de $T = vp(\frac{1}{x})$ est vide. Supposons donc que Ω soit un ouvert d'annulation de T non vide. Tout d'abord, on ne peut avoir $\Omega = \{0\}$ car $\{0\}$ n'est pas ouvert. Et donc, il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $a \in \Omega$. Supposons $a > 0$ (le raisonnement sera identique si $a < 0$). Comme Ω est ouvert, soit $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset \Omega$. On peut supposer $\alpha < a$, si bien que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]a-\alpha, a+\alpha[$, positive et telle que $\varphi = 1$ sur $]a - \frac{\alpha}{2}, a + \frac{\alpha}{2}[$. On a alors

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle \geq \int_{a-\frac{\alpha}{2}}^{a+\frac{\alpha}{2}} \frac{dx}{x} > 0$$

donc $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle \neq 0$ ce qui contredit le fait que Ω est un ouvert d'annulation de T. On a donc bien prouvé que supp $vp(\frac{1}{x}) = \mathbb{R}$.

Exercice 2.19. Soit L le support de T. On prend une fonction θ à support compact dans Ω qui vaut 1 au voisinage de L. On en déduit que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $\varphi - \theta\varphi$ est nulle au voisinage de $L =$ supp T donc $\varphi - \theta\varphi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash\text{supp } T)$ et donc $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \theta\varphi\rangle$. Soit K un compact de Ω. Soit M le support de θ qui est donc un compact de Ω. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, alors

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \theta\varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_M |\partial^\alpha(\theta\varphi)|$$

Or, si $|\alpha| \leq N$, grâce à la formule de Leibniz,

$$\sup_M |\partial^\alpha(\theta\varphi)| = \sup_{K\cap M} |\partial^\alpha(\theta\varphi)| \leq C' \left(\sup_M \sup_{\beta\leq\alpha} |\partial^\beta\theta|\right) \left(\sup_K \sup_{\beta\leq\alpha} |\partial^\beta\varphi|\right)$$

et donc

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C'' \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_K |\partial^\alpha(\theta\varphi)|$$

où C'' et N sont donc indépendantes de K.

Exercice 2.20. Si $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ et si θ_1 et θ_2 sont deux fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ valant 1 au voisinage de supp T, alors $(\theta_1 - \theta_2)\varphi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash\text{supp } T)$ donc $\langle T, \theta_1\varphi\rangle = \langle T, \theta_2\varphi\rangle$.

Exercice 2.21.

i. Si $y \in \mathbb{R}^n$, $(T * \varphi)(y) = \langle T, \tau_y \check{\varphi} \rangle$. Donc $[\tau_x(T * \varphi)](y) = \langle T, \tau_{y-x}\check{\varphi}\rangle$. Or, si $z \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{y-x}\check{\varphi}(z) = \varphi(y-x-z)$ et $[\tau_y((\tau_x\varphi)\check{})](z) = \varphi(y-x-z)$ donc $\langle T, \tau_{y-x}\check{\varphi}\rangle = \langle T, \tau_y((\tau_x\varphi)\check{})\rangle = (T*(\tau_x\varphi))(y)$ et donc $\tau_x(T*\varphi) = T*(\tau_x\varphi)$.
Si $y \in \mathbb{R}^n$, $((\tau_x T) * \varphi)(y) = \langle \tau_x(T), \tau_y\check{\varphi}\rangle = \langle T, \tau_{-x}[(\tau_y\check{\varphi})]\rangle$ avec $\tau_{-x}[(\tau_y\check{\varphi})](z) = \varphi(y-z-x)$ et donc $\tau_x(T*\varphi) = (\tau_x T) * \varphi$.

ii. Montrons d'abord que, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors

$$(\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$$

On a $(\partial^\alpha T) * \varphi(x) = \langle (\partial^\alpha T), \tau_x\check{\varphi}\rangle = (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha(\tau_x\check{\varphi})\rangle = \langle T, \tau_x[(\partial^\alpha\varphi)\check{}]\rangle$
$= T * (\partial^\alpha\varphi)(x)$
Si $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$ avec $h_1 \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}\frac{T*\varphi(x+h) - T*\varphi(x)}{h_1} &= \frac{\tau_{-h}T*\varphi - T*\varphi}{h_1}(x)\\ &= \left[\frac{\tau_{-h}T - T}{h_1} * \varphi\right](x) = \left[T * \frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h_1}\right](x).\end{aligned}$$

Pour conclure que $T*\varphi$ est dérivable et que $\partial_1(T*\varphi) = T*(\partial_1\varphi)$, il suffit de montrer que la famille de fonctions $\frac{\tau_{-h}\varphi - \varphi}{h_1}$ tend vers $\partial_1\varphi$ pour la topologie de $\mathcal{D}$. Le résultat général pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ quelconque s'obtiendra alors par récurrence sur $|\alpha|$.
Il suffit donc de montrer que, pour toute suite h_j de réels qui tend vers 0, la suite $\varphi_j = \frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\ldots,0)}\varphi - \varphi)$ tend vers $\partial_1\varphi$. Remarquons tout d'abord que supp φ_j est inclus dans (supp φ) $\cup$ (supp $\varphi + h_j$) et donc qu'il existe un compact K tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, supp φ_j est inclus dans K car (h_j) tend vers 0. Il reste à montrer que les dérivées d'ordre β pour $\beta \in \mathbb{N}^n$ de $\varphi_j - \varphi$ tendent vers 0 uniformément sur K quand j tend vers $+\infty$ pour conclure. On remarque que, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in K$,

$$\begin{aligned}&\partial^\beta\left(\frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\ldots,0)}\varphi - \varphi) - \partial_1\varphi\right)(x_1,\ldots,x_n)\\ &\quad = \frac{\partial^\beta\varphi(x_1 - h_j, x_2, \ldots, x_n) - \partial^\beta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_j} - \partial_1\partial^\beta\varphi(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\left|\partial^\beta\left(\frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\ldots,0)}\varphi - \varphi) - \partial_1\varphi\right)(x_1,\ldots,x_n)\right|\\ &\leq \left|\frac{\partial^\beta\varphi(x_1 - h_j, x_2, \ldots, x_n) - \partial^\beta\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h_j} - \partial_1\partial^\beta\varphi(x_1,\ldots,x_n)\right|\\ &\leq |h_j| \sup_K |\partial_1^2\partial^\beta\varphi|\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, et donc

$$\sup_{x\in K}\left|\partial^\beta\left(\frac{1}{h_j}(\tau_{-(h_j,0,\ldots,0)}\varphi-\varphi)-\partial_1\varphi\right)(x_1,\ldots,x_n)\right|\leq |h_j|\sup_K|\partial_1^2\partial^\beta\varphi|$$

tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$ ce qui termine la preuve.

iii. Si $x\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}(T*(\varphi*\psi))(x)&=\langle T,\tau_x[(\varphi*\psi)\check{}\,]\rangle=\langle T,z\mapsto(\varphi*\psi)(-z+x)\rangle\\&=\langle T,z\mapsto\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy\rangle.\end{aligned}$$

Le support de l'application $z\mapsto\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy\rangle$ est $x-($ supp φ + supp ψ $)=K_x$ et l'intégrale précédente est en fait une intégrale portant sur les $y\in(x-K_x-\operatorname{supp}\varphi)\cap\operatorname{supp}\psi$. Notons L_x le compact $(x-K_x-\operatorname{supp}\varphi)\cap\operatorname{supp}\psi$ et soit A_x un nombre réel positif tel que $L_x\subset[-A_x,A_x]^n$. En écrivant cette intégrale comme une limite de sommes de Riemann, on peut écrire

$$\int_{y\in\mathbb{R}^n}\varphi(x-z-y)\psi(y)dy=\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^N\lambda_{j,N}\varphi(x-z-y_{j,N})\psi(y_{j,N})$$

où les $\lambda_{j,N}>0$ et $y_{j,N}\in L_x$. Plus précisément, si F est une fonction C^1 sur $[a,b]$ et M_2 un majorant de la dérivée seconde de F, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne

$$|F(b)-F(a)-(b-a)F'(a)|\leq M_2\frac{(b-a)^2}{2}.$$

En particulier si f est continue sur $[a,b]$, la fonction $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ vérifie cette inégalité et donc

$$\left|\int_a^b f(t)dt-(b-a)f(a)\right|\leq M_1\frac{(b-a)^2}{2}$$

où M_1 est un majorant de f'. Si on décompose $[a,b]$ en les N intervalles $[a+\frac{b-a}{N}k,a+\frac{b-a}{N}(k+1)]$ pour $k=0,\ldots,N-1$, si on applique l'inégalité sur chacuns de ces intervalles et si on somme ces inégalités, on obtient

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f\left(a+\frac{b-a}{N}k\right)\right|\leq M_1\frac{(b-a)^2}{2N}$$

(c'est la méthode des rectangles). En particulier, pour $z \in K_x$, on a

$$\Bigg| \int_{[-A_x,A_x]^n} \varphi(x-z-y)\psi(y)dy - \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1} \frac{2A_x}{N}\varphi(x-z+a-k\frac{2A_x}{N})\psi(-a+k\frac{2A_x}{N}) \Bigg| \leq \frac{2n}{N}A_x^2 \sup_{L_x} \max_{i=1,\ldots n} \left| \frac{\partial}{\partial y_i}(\varphi(x-z-y)\psi(y)) \right|.$$

En appliquant cette inégalité aux fonctions $z \mapsto \int_{[-A_x,A_x]^n} \varphi(x-z-y)\psi(y)dy$ et ainsi qu'aux dérivées $z \mapsto \int_{[-A_x,A_x]^n} \partial^\beta \varphi(x-z-y)\psi(y)dy$, on en déduit que la suite de fonctions à supports dans K_x

$$z \mapsto \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1} \frac{2A_x}{N}\varphi(x-z+a-k\frac{2A_x}{N})\psi(-a+k\frac{2A_x}{N})$$

converge uniformément ainsi que ses dérivées sur le compact K_x vers la fonction

$$z \mapsto \int_{[-A_x,A_x]^n} \varphi(x-z-y)\psi(y)dy.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \langle T, z \mapsto \int_{y\in\mathbb{R}^n} \varphi(x-z-y)\psi(y)dy\rangle &= \\ = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1} \frac{2A_x}{N}\langle T, z \mapsto \varphi(x-z+a-k\frac{2A_x}{N})\rangle\psi(-a+k\frac{2A_x}{N}) \\ = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N-1} \frac{2A_x}{N} T * \varphi(x+a-k\frac{2A_x}{N})\rangle\psi(-a+k\frac{2A_x}{N}) \end{aligned}$$

La fonction $T * \varphi$ est C^∞, donc continue et donc la dernière limite est une somme de Riemann qui converge donc vers

$$\int_{y\in\mathbb{R}^n} (T*\varphi)(x-y)\psi(y)dy = \int_{y\in\mathbb{R}^n} \langle T, z \mapsto \varphi(x-z-y)\rangle\psi(y)dy.$$

Autrement dit, on a montré qu'on peut permuter l'action de la distribution T avec l'intégration par rapport à y, c'est-à-dire qu'on a

$$\left\langle T, z \mapsto \int_{y\in\mathbb{R}^n} \varphi(x-z-y)\psi(y)dy \right\rangle = \int_{y\in\mathbb{R}^n} \langle T, z \mapsto \varphi(x-z-y)\rangle\psi(y)dy.$$

On a alors

$$\int_{y\in\mathbb{R}^n} \psi(y)\langle T, z\mapsto \varphi(x-z-y)\rangle dy = \int_{y'\in\mathbb{R}^n} \psi(x-y')\langle T, z\mapsto \varphi(y'-z)\rangle dy$$

où on a posé $y' = x - y$, et cette dernière intégrale vaut

$$\int_{y'\in\mathbb{R}^n} \psi(x-y')(T*\varphi)(y') = [(T*\varphi)*\psi](x).$$

(Cette question était difficile donc ne vous inquiétez pas si vous n'êtes pas arrivés à la traiter).

Exercice 2.22. Les points *i*, *ii* et *iii* se prouvent de manière analogue. Il reste le point *iv*, c'est-à-dire qu'il reste à montrer que $T*\psi$ est à support compact. Plus précisément, nous allons montrer que $\operatorname{supp} T*\psi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi$. Pour cela, soit $x \notin (\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi)$. Or $\operatorname{supp} \tau_x\check{\psi} = x -\operatorname{supp} \psi$. Et $(x - \operatorname{supp} \psi) \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$ puisqu'on a supposé que $x \notin (\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi)$. Et donc $T*\psi(x) = 0$, ce qui prouve bien que $\operatorname{supp} T*\psi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \psi$.

Exercice 2.23. Si T est à support compact alors $T*\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et donc $S*(T*\varphi)$ a bien un sens. Si S est à support compact, alors $T*\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et donc $S*(T*\varphi)$ a bien un sens. Il existe alors une unique distribution U telle que $U*\varphi = S*(T*\varphi)$. Pour voir l'unicité il suffit de remarquer qu'on a nécessairement $\langle U,\varphi\rangle = (U*\check{\varphi})(0) = [S*(T*\check{\varphi})](0)$. Montrons que U ainsi définie est bien une distribution. Si φ_j est une suite de fonctions qui tend vers 0, alors il existe un compact K qui contient tous les supports des φ_j et tel que, sur K, toutes les dérivées des φ_j tendent uniformément vers 0. On en déduit que toutes les dérivées de $(T*\check{\varphi}_j)$ tendent uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{R}^n$ et donc que $[S*(T*\check{\varphi}_j)](0) = \langle U,\varphi_j\rangle$ tend vers 0 donc que U est bien une distribution. On a alors

$$\begin{aligned}&(U*\varphi)(x) = \langle U,\tau_x\check{\varphi}\rangle = [U*(\tau_x\check{\varphi})\check{}\,](0) = [S*(T*(\tau_x\check{\varphi})\check{}\,)](0)\\ &= [S*(T*(\tau_{-x}\varphi))](0) = [S*\tau_{-x}(T*\varphi)](0) = \tau_{-x}[S*(T*\varphi)](0) = [S*(T*\varphi)](x),\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 2.24.

i. Si $\varphi,\psi \in \mathcal{D}$, puisque la convolution de fonctions est commutative, le point *iii* du théorème 7.2 implique que

$$(S*T)(\varphi*\psi) = S*(T*(\varphi*\psi)) = S*((T*\varphi)*\psi) = S*(\psi*(T*\varphi).$$

Si supp T est compact, appliquons une fois encore *iii* du théorème 7.2 tandis que si supp S est compact, on applique le point *iii* du théorème 7.4. Dans les deux cas, nous avons

$$(S * T)(\varphi * \psi) = (S * \psi) * (T * \varphi).$$

Puisque $\varphi * \psi = \psi * \varphi$, le même calcul donne

$$(T * S) * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * (S * \psi).$$

On a donc

$$(S * T)(\varphi * \psi) = (T * S) * (\varphi * \psi).$$

Pour conclure que $S * T = T * S$, il reste à montrer que si U est une distribution telle que $U * \varphi * \psi = 0$ pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, alors $U = 0$. Pour cela on remarque que si $\varphi \in \mathcal{D}$ et si θ est une fonction de $\mathcal{D}$ à support dans un voisinage de 0 et dont l'intégrale vaut 1, alors $\theta_j(x) = j^n \theta(jx)$ est une suite de $\mathcal{D}$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\varphi * \theta_j)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) j^n \theta(jy) dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - u/j)\theta(u) du \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \theta(u) du = \varphi(x).$$

donc, comme $U * (\varphi * \theta_j) = 0$, on a $U * \varphi = 0$ puis $U = 0$ puisque $\langle U, \varphi \rangle = (U * \check{\varphi})(0)$.

ii. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, un calcul simple nous donne

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, (T * \check{\varphi})\check{}\, \rangle.$$

D'après *i*, nous pouvons supposer que supp T est compact. La démonstration du point *iv* du théorème 7.4. montre que le support de $T * \check{\varphi}$ est contenu dans supp T − supp φ. En particulier $\langle S * T, \varphi \rangle = 0$ à moins que supp S ne coupe supp φ − supp T, c'est-à-dire à moins que supp φ ne coupe supp S + supp T.

iii. Nous concluons d'après *ii* que

$$(R * S) * T \qquad \text{et} \qquad R * (S * T)$$

sont définies si au plus un des ensembles supp R, supp S et supp T n'est pas compact. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$(R * (S * T)) * \varphi = R * ((S * T) * \varphi) = R * (S * (T * \varphi))$$

Si supp T est compact, alors

$$((R * S) * T) * \varphi = (R * S)(T * \varphi) = R * (S * (T * \varphi))$$

car $T * \varphi \in \mathcal{D}$ d'après *iv* du théorème 7.4. On obtient donc le résultat dès que supp T est compact. Si supp T n'est pas compact, alors supp R est compact et le cas précédent combiné avec la propriété de commutativité *i* nous donne

$$R*(S*T) = R*(T*S) = (T*S)*R = T*(S*R) = T*(R*S) = (R*S)*T.$$

iv. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $\delta_0 * \varphi = \varphi$ car

$$(\delta_0 * \varphi)(x) = \langle \delta_0, \tau_x \check{\varphi} \rangle = (\tau_x \check{\varphi})(0) = \varphi(x).$$

Donc les parties *iii* ci-dessus et *ii* du théorème 7.2 nous donnent

$$(\partial^\alpha R) * \varphi = R * (\partial^\alpha \varphi) = R * (\partial^\alpha (\delta_0 * \varphi)) = R * (\partial^\alpha \delta_0) * \varphi.$$

v. Cela découle de *iv*, *iii* et *i* :

$$\partial^\alpha (R * S) = (\partial^\alpha \delta_0) * (R * S) = ((\partial^\alpha \delta_0) * R) * S = (\partial^\alpha R) * S$$

et de même pour l'autre égalité.

Exercice 2.25. On a $D(T * E) = T * (DE) = T * \delta_0 = T$.