Chapitre 2.

Théorie des distributions

1. Définition, propriétés élémentaires et exemples

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'évaluation de cette fonction en un point a un sens théorique mais n'a que peu de sens en pratique. Si par exemple Ω est la pièce dans laquelle vous vous trouvez et f est la fonction qui à un point de cette pièce associe la température en ce point, la valeur précise de cette valeur n'est physiquement pas mesurable. Si vous placez un thermomètre en ce point, vous obtiendrez la température du thermomètre en question (qui occupe matériellement plus de place qu'un simple point...), qui correspond à la valeur moyenne des points qui constituent ce thermomètre. En pratique, vous n'obtiendrez donc pas $f(x)$ mais plutôt $\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\varphi(u)du$ où $\varphi(u)$ sera une fonction dont le support sera très proche du point x (le support de φ correspond à l'espace physiquement occupé par le thermomètre dans notre exemple) qui correspond à la valeur moyenne de f prise dans le support de φ avec la densité φ. En particulier, plus le thermomètre sera précis, plus le support de φ sera proche du point x et plus l'intégrale de φ sera proche de 1. L'idéal est bien sûr d'avoir $\operatorname{supp} \varphi = \{x\}$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)du = 1$ ce qui n'est pas possible puisque l'intégrale d'une fonction nulle presque partout vaut 0. L'idée donc est de ne pas considérer les valeurs de la fonction $f(x)$ mais plutôt de considérer les valeurs de l'application qui à une fonction φ continue à support compact associe $\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\varphi(u)du$. Si on la note T, on remarque qu'on a alors

$$\forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^n, \quad \exists C > 0, \quad \forall \varphi\ C^\infty \text{ dans } \mathbb{R}^n \text{ à support inclus dans } K$$

$$|T(\varphi)| \leq C \sup_K |\varphi|.$$

Cette remarque est le point de départ de la définition des distributions.

1.1. Notation. Si Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un sous-ensemble de Ω, on notera $K \subset\subset \Omega$ si K est relativement compact dans Ω *i.e.* $\overline{K}$ est un compact inclus dans Ω.

Si Ω est un sous-ensemble ouvert de Ω, on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ telles que supp $\varphi \subset\subset \Omega$.

Si $K \subset\subset \Omega$, on note $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que supp $\varphi \subset K$.

1.2. Définition. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que T est une *distribution sur* Ω si et seulement si T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\forall K \subset\subset \Omega, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \exists C > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

$T(\varphi)$ sera souvent noté $\langle T, \varphi\rangle$. On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

Cette souplesse au niveau de la définition des distributions qui en fait finalement des objets plus naturels d'un point de vue physique que les fonctions apportera plus de propriétés aux distributions qu'aux fonctions. En particulier, on verra que toute distribution est indéfiniment dérivable dans un sens que l'on précisera, et que si une suite de distributions converge vers une distribution, alors la suite des dérivées converge vers les dérivées de la limite. Ces propriétés qui sont bien entendues fausses pour les fonctions confèrent aux distributions une grande souplesse d'utilisation dans les applications pratiques.

Nous allons introduire une notion de convergence pour une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui nous sera utile par la suite.

1.3. Définition. Soit $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ quand $j \to +\infty$ si et seulement si il existe $K \subset\subset \Omega$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, supp $\varphi_j \subset K$ et tel que φ_j ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 uniformément dans K. Enfin, on dira que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si $(\varphi_j - \varphi)_j$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Nous avons le résultat suivant :

1.4. Proposition. *Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si, pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle T, \varphi_j\rangle \longrightarrow_{j\to+\infty} 0$.*

Preuve. Exercice 2.1.

Donnons quelques exemples de distributions.

1.5. Distribution de Dirac. Si $a \in \Omega$, on définit la distribution δ_a de Dirac en a par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a).$$

On vérifie (Exercice 2.2) que c'est bien une distribution sur Ω.

1.6. Distribution associée à une fonction. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable (*i.e.* intégrable sur tout compact de Ω). On définit la distribution T_f par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi.$$

On vérifie (Exercice 2.3) que c'est une distribution et que l'application $f \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est injective. Par abus de notation, on identifiera T_f et f.

1.7. Distribution valeur principale de $1/x$. La fonction $1/x$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la distribution "valeur principale de $1/x$" et on note $vp(\frac{1}{x})$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

On vérifie (Exercice 2.4) que cette limite existe et définit bien une distribution.

Exercice 2.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$. Montrez qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$.*

2. Ordre d'une distribution.

2.1. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T une distribution sur Ω. On dit que T est d'ordre inférieur ou égal à $N \in \mathbb{N}$ si et seulement si

$$\forall K \subset\subset \Omega, \quad \exists C > 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), \quad |T(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$$

(en d'autres termes le N dans la définition des distributions est indépendant de K).

On dira que T est d'ordre N si T est d'ordre inférieur ou égal à N mais n'est pas d'ordre inférieur ou égal à $N-1$.

2.2. Exemples. - Les distributions d'ordre 0 sont les mesures de Radon (Exercice 2.6.).

- La valeur principale de $1/x$ est d'ordre égal à 1. (Exercice 2.7. On pourra considérer des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui valent 1 sur $[\frac{1}{j}, 1]$, telles que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2j}, 2]$).

3. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3.1. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, T une distributions sur Ω et $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que T_j converge vers T quand $j \to +\infty$ au sens des distributions si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_j, \varphi \rangle \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle.$$

Exercice 2.8. *Montrez que la suite* $\cos jx$ *de distributions sur* $\mathbb{R}$ *tend vers* 0.

Enfin, nous avons le théorème suivant que nous admettrons car sa démonstration est lourde mais l'argument essentiel est le théorème de Banach-Steinhaus :

3.2. Théorème. *Si* T_j *est une suite de distributions sur* Ω *telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi \rangle \text{ existe,}$$

alors la forme linéaire T *sur* $\mathcal{D}(\Omega)$ *définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi \rangle$$

est une distribution sur Ω.

4. Multiplication des distributions par des fonctions C^∞.

Soit f une fonction localement intégrable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et g une fonction C^∞ sur Ω. On sait définir la fonction gf par $(gf)(x) = g(x)f(x)$. Cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega (gf)\varphi = \int_\Omega f(g\varphi).$$

Cette propriété est à la base de la définition suivante.

4.1. Théorème et définition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞. Soit T une distribution sur Ω. On définit la distribution notée gT par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle.$$

On vérifie (Exercice 2.9) qu'on a bien défini ainsi une distribution.

Exercice 2.10. *Montrez que $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.*

Exercice 2.11. *Montrez que l'espace des solutions de l'équation $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est le sous-espace $\{c\delta_0,\ c \in \mathbb{C}\}$ de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On pourra si $\varphi, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\theta(0) = 1$ montrer que $\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)$ est de la forme $x\psi(x)$ où $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

5. Dérivation des distributions.

Soit f une fonction C^∞ sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. On sait définir la dérivée de f. Cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int f'\varphi = -\int f\varphi'.$$

Cette propriété s'obtient par intégration par parties.

Si maintenant f est une fonction C^∞ sur un ouvert Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on sait, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ définir la dérivée d'ordre α de f. Cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int (\partial^\alpha f)\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int f(\partial^\alpha \varphi).$$

(Exercice 2.12. Vérifier cette affirmation.) Cette propriété est à la base de la définition suivante.

5.1. Théorème et définition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T une distribution sur Ω. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la distribution dérivée d'ordre α de T notée $\partial^\alpha T$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

On vérifie (Exercice 2.13) qu'on a bien défini ainsi une distribution.

Exercice 2.14. *Montrez que* $\ln|x|$ *définit une distribution sur* $\mathbb{R}$ *et calculez la dérivée de cette distribution.*

5.2. Proposition. *L'application $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ est linéaire continue.*

Preuve. Exercice 2.15.

5.3. Théorème. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction différentiable dans Ω telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Alors*

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_j} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}}.$$

Exercice 2.16. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Montrez qu'il suffit de prouver que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$-\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx = \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \varphi(x) dx.$$

2. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
   - **a.** *Montrez que si le support de φ est inclus dans un parallélépipède $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\subset \Omega$, l'égalité précédente est vraie.*
   - **b.** *Montrez qu'il existe un nombre fini de parallélépipèdes dont la réunion contienne le support de φ.*
   - **c.** *Conclure.*

Nous introduisons maintenant la notion de solution fondamentale d'un opérateur aux dérivées partielles linéaire.

5.4. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $D : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ un opérateur linéaire aux dérivées partielles de la forme

$$D = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha(x) \partial^\alpha$$

où I est une partie finie de $\mathbb{N}^n$ et les a_α sont des applications de classe C^∞ sur Ω. On dit que la distribution T est une (il n'y a pas unicité en général) *solution fondamentale* de D si et seulement si $DT = \delta_0$.

Exercice 2.17. *On identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Pour $z = x + iy$, on pose $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y})$. Montrez que la fonction $\frac{1}{\pi z}$ définit une distribution solution fondamentale de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. On pourra utiliser la suite de distributions $T_n = \frac{1}{\pi} \frac{\bar{z}}{|z|^2 + \frac{1}{n^2}}$.*

6. Restriction et Support d'une distribution.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ se prolonge par 0 en dehors de Ω_1 pour définir un élément de $\mathcal{D}(\Omega_2)$. Cette injection de $\mathcal{D}(\Omega_1)$ dans $\mathcal{D}(\Omega_2)$ est continue. Elle permet donc de définir un opérateur de restriction de $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ qui à toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ associe l'élément de $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ donné par

$$\langle T_{|\Omega_1}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

6.1. Théorème de recollement. *Soit $(\Omega_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $j \in J$, soit $T_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$. On suppose que la famille $(T_j)_j$ satisfait la condition de compatibilté suivante :*

$$T_{j|\Omega_j \cap \Omega_k} = T_{k|\Omega_j \cap \Omega_k}, \qquad \textit{pour tous } j, k \in J.$$

Alors il existe une unique distribution T sur $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ telle que la restriction de T à chaque Ω_j soit T_j.

Preuve. Soit K un compact de Ω. Il existe une partie finie $I \subset J$ telle que $K \subset_{j \in I} \Omega_i$. Il existe donc une suite finie $(\varphi_j)_j \in I$ telle $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ et telle que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et $\sum_{j \in I} \varphi_j = 1$ au voisinage de K. Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on pose

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{j \in I} \langle T_j, \varphi \varphi_j \rangle.$$

Observons d'abord que T ne dépend pas du choix de la suite (φ_j). En effet, si I' est une partie finie de J telle que $K \subset \bigcup_{j\in I'} \Omega_k$ et si $\psi_k \in \mathcal{D}(\Omega_k)$ pour $k \in I'$ est une suite finie telle que $0 \le \psi_k \le 1$ et $\sum_{k\in I'} \psi_k = 1$ au voisinage de K, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} \langle T_j, \varphi\varphi_j\rangle &= \sum_{j\in I} \langle T_j, \sum_{k\in I'} \varphi\varphi_j\psi_k\rangle \\
&= \sum_{j\in I}\sum_{k\in I'} \langle T_j, \varphi\varphi_j\psi_k\rangle \\
&= \sum_{k\in I'}\sum_{j\in I} \langle T_k, \varphi\varphi_j\psi_k\rangle \\
&= \sum_{k\in I'} \langle T_k, \sum_{j\in I} \varphi\varphi_j\psi_k\rangle = \sum_{k\in I'} \langle T_k, \varphi\psi_k\rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème 1.4.1, on voit que $T : \mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{D}_K(\Omega)$ est continue. Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il est clair que la restriction de T à chaque Ω_j est précisément T_j. Finalement, l'unicité de T découle de sa définition. □

6.2. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle *ouvert d'annulation de* T tout ouvert U de Ω tel que la restriction de T à U est nulle.

6.3. Proposition. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors il existe un plus grand ouvert d'annulation de T.*

Preuve. Soit O_T la réunion de tous les ouverts d'annulation de T. Montrons que O_T est aussi un ouvert d'annulation. Soit K un compact de O_T. Alors il existe un nombre fini $U_1, \dots, U_N$ d'ouverts d'annulation tels que $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$. On prend une partition de l'unité $\varphi_j \in \mathcal{D}(U_j)$ telle que $0 \le \varphi_j \le 1$ et $\sum_{j=1}^N \varphi_j = 1$ au voisinage de K. Si $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ alors $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^N \langle T, \varphi\varphi_j\rangle$, ce qui montre que T s'annule sur O_T. □

6.4. Définition. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle *support de* T et on note supp T le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert d'annulation de T.

Exercice 2.18.

1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \Omega$. Montrez que supp $\delta_a = \{a\}$.*
2. *Montrez que supp vp$[\frac{1}{x}] = \mathbb{R}$.*

6.5. Définition. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.

Nous avons le théorème suivant :

6.6. Théorème. *Toute distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini. Plus précisément, si N est l'ordre de T, pour tout voisinage compact K de supp T, il existe une constante C telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Preuve. Exercice 2.19. □

6.7. Extension de la dualité. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et si θ est une fonction dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\theta \equiv 1$ dans un voisinage de supp T, alors pour tout $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\langle T, \varphi\theta \rangle$ est indépendant de l'application θ choisie (Exercice 2.20 : le vérifier). On prolongera donc l'action de T sur $C^\infty(\Omega)$ par la formule précédente. Ceci explique la notation $\mathcal{E}'(\Omega)$ employée pour désigner l'ensemble des distributions à support compact : $\mathcal{E}(\Omega)$ est en effet une notation communément employée pour désigner l'espace $C^\infty(\Omega)$.

7. Convolution des distributions.

Dans le reste de ce chapitre, nous écrirons $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ au lieu de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, nous noterons $\tau_x f$ et $\check{f}$ les fonctions définies par

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x), \qquad \check{f}(y) = f(-y).$$

Si f et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y - x) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) g(x + u) du$$

si ces intégrales existent et leur convolution est définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy$$

pourvu que cette intégrale converge. Il devient alors naturel de définir la convolution d'une distribution avec une fonction de $\mathcal{D}$ de la manière suivante :

7.1. Définition. Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. On note $\tau_x T$ la distribution définie par $\langle \tau_x T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-x}\varphi \rangle$. On définit la convolée de T et φ comme étant la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe $\langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle$. On la note $T * \varphi$.

Nous avons le théorème suivant :

7.2. Théorème. *Si $T \in \mathcal{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, alors*

i. $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

ii. $T * \varphi$ *est* C^∞ *et, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi).$$

iii. $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi$.

Preuve. Exercice 2.21. □

7.3. Définition. Si $T \in \mathcal{E}'$ alors T peut alors agir sur $\mathcal{E}$. On peut donc en particulier définir $T * \varphi$ pour $\varphi \in \mathcal{E}$ par la formule $T * \varphi = \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle$.

Nous avons alors le théorème suivant :

7.4. Théorème. *Si $T \in \mathcal{E}'$, $\varphi \in \mathcal{E}$ et $\psi \in \mathcal{D}$, alors*

i. $\tau_x(T * \varphi) = (\tau_x T) * \varphi = T * (\tau_x \varphi)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

ii. $T * \varphi$ *est* C^∞ *et, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi).$$

iii. $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi = (T * \psi) * \varphi$.

iv. $T * \psi \in \mathcal{D}$.

Preuve. Exercice 2.22. □

Nous pouvons maintenant définir la convolée de deux distributions dont une est à support compact.

7.5. Théorème et définition. *Si S et T sont deux distributions dont l'une au moins est à support compact, alors il existe une unique distribution que l'on notera $S * T$ qui vérifie, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, $(S * T) * \varphi = S * (T * \varphi)$.*

Preuve. Exercice 2.23. □

Enfin, nous avons le théorème suivant :

7.6. Théorème. *Soient* $R, S, T \in \mathcal{D}'$.

i. *Si au moins une des distributions* S *et* T *est à support compact, alors* $S * T = T * S$.

ii. *Si au moins une des distributions* S *et* T *est à support compact alors* $\mathit{supp}\ (S * T) \subset \mathit{supp}\ S + \mathit{supp}\ T$.

iii. *Si au moins deux des distributions* R, S *et* T *sont à support compact, alors* $(R * S) * T = R * (S * T)$.

iv. *Pour toute distribution* T, $\delta_0 * T = T$.

v. *Si au moins une des distributions* S *et* T *est à support compact et si* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *on a* $\partial^\alpha(R * S) = (\partial^\alpha R) * S = R * (\partial^\alpha S)$.

Preuve. Exercice 2.24. □

Enfin, nous avons le théorème suivant qui justifie l'intérêt des solutions fondamentales.

7.7. Théorème. *Si* D *est un opérateur linéaire sur* $\mathbb{R}^n$ *et* E *une solution fondamentale de* D *alors, pour toute distribution* T *à support compact,* $T * E$ *vérifie* $D(T * E) = T$.

Preuve. Exercice 2.25. □