Chapitre 4.

Méthodes énergétiques, formulations variationnelles et espaces de Sobolev.

Tout ce que nous avons fait précédemment faisait appel aux méthodes de représentation intégrales. Nous nous proposons maintenant de faire appel à des méthodes différentes appelées méthodes énergétiques car elles font intervenir les normes L^2 de nombreuses expressions. Une première illustration de ces méthodes sera l'obtention du principe de Dirichlet pour l'étude de l'équation de Poisson.

1. Existence et unicité pour l'équation de Poisson et Principe de Dirichlet.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et S le bord de Ω. Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } S \end{cases} \tag{1}$$

où f est donnée sur Ω et g est donnée sur S. Nous avons le théorème suivant, qui découle du principe du maximum, mais nous allons en donner une autre preuve afin d'illustrer notre propos.

1.1. Théorème. *Il existe au plus une seule solution $u \in C^2(\bar{\Omega})$ du problème* (1).

Exercice 4.1. *Soient* u_1 *et* u_2 *deux solutions. Posons* $w = u_1 - u_2$. *Montrez, en utilisant la formule de Green que*

$$0 = -\int_\Omega w\Delta w\,dx = \int_\Omega \|\nabla w\|^2 dx.$$

En déduire que $w \equiv 0$ *dans* Ω.

Nous allons montrer à présent qu'une solution de l'équation (1) peut-être caractérisée comme minimisant une fonctionnelle appropriée. Pour cela, nous définissons la fonctionnelle *énergie* :

$$I[w] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\|\nabla w\|^2 - wf\right)\,dx$$

où les fonctions w sont dans l'ensemble

$$A = \{w \in C^2(\bar{\Omega}),\ w = g \text{ sur } S\}.$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2. (Principe de Dirichlet). *u est solution de* (1) *si et seulement si*

$$I[u] = \min_{w\in A} I[w]. \tag{2}$$

Exercice 4.2.

1. *Soit* $w \in A$ *et* u *solution de* (1). *Montrez que*

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - w)dx.$$

En déduire

$$0 = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla(u - w) - f(u - w)\right)dx,$$

puis que

$$\int_\Omega \left(\|\nabla u\|^2 - uf\right)dx = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla w - wf\right)dx \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2 - wf\right)dx.$$

En déduire qu'on a (2).

2. *Supposons qu'on ait* (2). *Soit* $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et posons*

$$i(\tau) = I[u + \tau v], \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Montrez que i *est dérivable, que* $i'(0) = 0$. *En déduire que*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - vf)dx = \int_\Omega (-\Delta u - f)v dx.$$

En déduire qu'on a (1).

2. Espaces de Sobolev en dimension 1.

2.1. Motivations.

Considérons le problème suivant. Etant donné $f \in C[0,1]$, trouver une fonction u vérifiant

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } [0,1], \\ u(0) = 0 & u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Une solution **classique** (ou solution **forte**) du problème (1) est une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ vérifiant (1) au sens usuel. Bien entendu, (1) peut-être résolu explicitement par un calcul très simple, mais nous ignorerons cet aspect des choses afin d'illustrer la méthode sur cet exemple élémentaire.

On multiplie (1) par $\varphi \in C^1[0,1]$ et on intègre par parties ; il vient :

$$\int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u\varphi = \int_0^1 f\varphi, \qquad \forall \varphi \in C^1[0,1], \qquad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{2}$$

On notera que (2) a un sens dès que $u \in C^1[0,1]$ (contrairement à (1) qui suppose u deux fois dérivable); en fait, il suffirait même d'avoir $u, u' \in L^1[0,1]$, u' en un sens à préciser. Disons (provisoirement) qu'une fonction u de classe C^1 qui vérifie (2) est une solution **faible** de (1).

Le programme suivant décrit les grandes lignes de l'approche variationnelle en théorie des équations aux dérivées partielles :

A. On précise la notion de solution faible ; celle-ci fait intervenir les espaces de Sobolev qui sont les outils de base.

B. On etablit l'existence et l'unicite d'une solution faible par la methode variationnelle, via le théorème de Lax-Milgram.

C. On prouve que la solution faible est de classe C^2 (par exemple) : c'est un résultat de régularité.

D. Retour aux solutions classiques. On montre qu'une solution faible de classe C^2 est une solution classique. L'etape D est très simple. En effet, supposons que $u \in C^2[0,1]$, $u(0) = u(1) = 0$ et u vérifie (2). En intégrant (2) par parties, on obtient

$$\int_0^1 (-u'' + u - f)\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in C^1([a,b], \qquad \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Exercice 4.3 *En déduire alors que* $-u'' + u = f$.

2.2. Définitions et propriétés immédiates.

Définition 2.2.1. Si I est un intervalle ouvert borné ou non de $\mathbb{R}$ et $p \in \bar{\mathbb{R}}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(I)$ est défini par

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I),\ u'(\text{dérivée distribution}) \in L^p(I)\}.$$

On pose

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Remarque 2.2.2. Bien faire attention qu'une fonction $u \in L^p(I)$ définit une distribution mais que la distribution dérivée de u n'a aucune raison d'être une fonction. On sait simplement que c'est une distribution, et rien de plus. C'est le fait d'être dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}$ qui sera alors équivalent au fait que la dérivée de u au sens des distributions coïncide avec une distribution associée à une fonction $g \in L^p(I)$, et c'est par abus de langage que l'on note $u' = g \in L^p(I)$.

Exercice 4.4

1. *Montrez que* $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ *pour tout* $p \geq 1$.

2. *Montrez que si* $I =]-1,1[$ *et si* $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ *alors pour tout* $p \in [1, +\infty]$, $u \in W^{1,p}(I)$ *et que* $u' = H$ *où*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & si\ -1 < x < 0. \end{cases}$$

Montrez que plus généralement toute fonction continue sur $\bar{I}$ *et continûment dérivable par morceaux sur* $\bar{I}$ *appartient à* $W^{1,p}(I)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty]$.

3. *Montrez que la fonction H n'appartient pas à $W^{1,p}$, pour tout $p \in [1, +\infty]$.*

Notation 2.2.3. L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(ou parfois si $1 < p < +\infty$, de la norme équivalente $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{1/p}$). L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2}$$

et la norme associée est

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Exercice 4.5. *Vérifiez les affirmations précédentes concernant les équivalences de normes.*

Nous avons le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.2.3. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace $W^{1,p}$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$. L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.*

Exercice 4.6. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Montrez que l'espace $W^{1,p}$ est bien un espace de Banach.*

2. *Montrez qu'un sous-ensemble F d'un espace métrique séparable est aussi séparable (on pourra considérer une suite (u_n) dense dans E, puis choisir $a_{m,n} \in B(u_n, \frac{1}{m+1}) \cap F$ si cet ensemble n'est pas vide). En considérant $T : W^{1,p} \ni u \mapsto (u, u') \in L^p \times L^p$, montrez que $W^{1,p}$ est séparable.*

Les fonctions de $W^{1,p}$ sont "en gros" des primitives de fonctions de L^p. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.4. *Soit $u \in W^{1,p}$; alors il existe une fonction $\widetilde{u} \in C(\bar{I})$ telle que*

$$u = \widetilde{u} \qquad \textit{presque partout sur } I$$

et

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \qquad \forall x, y \in I.$$

Remarque 2.2.5. *Précisons bien la portée du théorème précédent. Notons d'abord que si une fonction $u \in W^{1,p}$, alors toute fonction v telle que $u = v$ presque partout sur I appartient aussi à $W^{1,p}$. Le théorème précédent affirme que toute fonction u de $W^{1,p}$ admet un et un seul représentant continu, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue qui appartient à la classe d'équivalence de u pour la relation $u \sim v$ si et seulement si $u = v$ p.p. Quand cela sera utile, par exemple, pour donner un sens à $u(x)$ quand $x \in \bar{I}$, on remplacera systématiquement u par son représentant continu ; afin de ne pas alourdir les notations, on désignera également par u le représentant continu.*

Exercice 4.7. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Montrez que, si $f \in L^1_{loc}(I)$ est telle que $f' = 0$ au sens des distributions, alors il existe une constante C telle que $f = C$ p.p.*

2. *Soit $g \in L^1_{loc}(I)$ et $y_0 \in I$. On pose*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \qquad \forall x \in I.$$

Montrez qu'alors $v \in C(I)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi.$$

3. *En déduire le théorème.*

Théorème 2.2.6. *Soit $u \in L^p$ avec $1 < p \leq +\infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. $u \in W^{1,p}$

ii. *Il existe une constante C telle que*

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$$

où p' est tel que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

iii. *Il existe une constante C telle que, pour tout ouvert $\omega \subset\subset I$ et tout $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < d(\omega, \mathbb{R} \setminus I)$, on a*

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ *dans ii et iii.*

Exercice 4.8. *On se propose de montrer le théorème précédent .*

1. *Montrez que i implique ii.*

2. *En utilisant la forme linéaire*

$$\varphi \in D(I) \mapsto \int_I u\varphi'$$

et le théorème de dualité $(L^p)' = L^{p'}$, *montrez que ii implique i.*

3. *On se propose de montrer que i implique iii. Montrez que, pour* $x \in \omega$,

$$u(x+h) - u(x) = h \int_0^1 u'(x+sh)ds.$$

En déduire la conclusion si $p = +\infty$. *Si* $1 < p < +\infty$, *montrez que*

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

En déduire iii.

4. *Montrons maintenant que iii implique ii. Soit* $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. *On choisit* $\omega \subset\subset I$ *tel que supp* $\varphi \subset \omega$. *Pour* $h \in \mathbb{R}$ *avec* $|h| < d(\omega, \mathbb{R} \setminus I)$, *montrez qu'on a*

$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx.$$

En déduire que

$$\left| \int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^{p'}},$$

puis que

$$\left| \int u\varphi' \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Corollaire 2.2.7. *Une fonction* $u \in L^\infty(I)$ *appartient à* $W^{1,+\infty}$ *si et seulement s'il existe une constante* C *telle que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \qquad \text{pour presque tous } x, y \in I.$$

Exercice 4.9. *Montrez le corollaire 2.2.7.*

Certaines opérations fondamentales de l'analyse ont un sens uniquement pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (par exemple la convolution, la transformation de Fourier, etc ...). Il est donc utile de pouvoir prolonger une fonction $u \in W^{1,p}(I)$ en une fonction $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Le résultat suivant répond à cette préoccupation :

Théorème 2.2.8. (Opérateur de prolongement). *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Il existe un opérateur de prolongement* $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ *linéaire et continu tel que*

i. $[P(u)]_{|I} = u$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.

ii. $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$

iii. $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$.

Exercice 3.10. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Commençons par le cas où I est non borné. Montrez qu'on peut se ramener au cas où $I =]0, +\infty[$. Posons*

$$P(u)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & si\ x \geq 0, \\ u(-x) & si\ x < 0. \end{cases}$$

Montrez que P vérifie les conditions énoncées.

2. *On cosidère maintenant le cas d'un intervalle borné I. Montrez qu'on peut se ramener au cas où $I =]0, 1[$. On fixe une fonction $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta \leq 1$ telle que*

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < \frac{1}{4} \\ 0 & si\ x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Etant donnée une fonction f définie sur $]0, 1[$, on pose

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ 0 < x < 1, \\ 0 & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

2.1. *Montrez que, si $u \in W^{1,p}(I)$, alors $\eta\widetilde{u} \in W^{1,p}(]0, +\infty[)$ et $(\eta\widetilde{u})' = \eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u}'$.*

2.2. *Soit $u \in W^{1,p}(I)$. On écrit $u = \eta u + (1 - \eta)u$. Montrez qu'il existe une fonction $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ qui prolonge ηu et telle que*

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \qquad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

2.3. *Construire de manière analogue un prolongement v_2 de $(1 - \eta)u$.*

2.4. *Conclure.*

Certaines propriétés des fonctions de classe C^1 restent valables pour les fonctions de $W^{1,p}$. Il est très commode d'établir ces propriétés par densité à l'aide du résultat suivant :

Théorème 2.2.9. (Densité). *Soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors il existe une suite (u_n) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_{n|I} \to u$ dans $W^{1,p}(I)$.*

Exercice 4.11. *On se propose de montrer le théorème précédent. Pour cela, on va utiliser une technique importante de convolution (qui rend les fonctions C^∞) et de troncature (qui rend les fonctions à support compact).*

1. *Montrez tout d'abord qu'on peut supposer que $I = \mathbb{R}$.*

2. *Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Montrez que $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $(\rho * v)' = \rho * v'$.*

3. *On fixe une fonction $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq 1, \\ 0 & si\ |x| \geq 2. \end{cases}$$

On définit la suite

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right).$$

On définit aussi une suite régularisante ρ_n, c'est-à-dire une suite ρ_n de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que supp $\rho_n \subset]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ et $\int \rho_n = 1$, $\rho_n \geq 0$. Montrez que la suite $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ converge vers u dans $W^{1,p}$ et vérifie la conclusion du théorème 2.2.9.

Remarque 2.2.10. *En général, on ne peut pas choisir dans le théorème 2.2.9 une suite de $\mathcal{D}(I)$ (voir à ce sujet le paragraphe suivant). Autrement dit, $\mathcal{D}(I)$ n'est pas dense dans $W^{1,p}(I)$ (sauf si $I = \mathbb{R}$).*

Théorème 2.2.11. *Il existe une constante C (dépendant seulement de la longueur de I) telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_W^{1,p}(I), \qquad \forall u \in W^{1,p}(I), \qquad \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

Autrement dit, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Exercice 4.12. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Montrez qu'on peut supposer $I = \mathbb{R}$.*

2. *Soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si $1 \leq p < +\infty$, on pose $G(s) = |s|^{p-1}s$..*

2.1. *Montrez que la fonction $w = G(v)$ est de classe C^1 à support compact et que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1} v'(t) dt.$$

2.2. *En déduire que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |v(x)|^p \leq p \|v\|_{L^p}^{p-1} \|v'\|_{L^p},$$

et que

$$\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \|v\|_{L^\infty} \leq C \|v\|_{W^{1,p}}$$

où C est une constante universelle.

2.3. *Conclure.*

Exercice 4.13. *Montrez que si I est un intervalle borné et $1 \leq q \leq +\infty$, alors*

$$|||u||| = \|u'\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(I)$.

Corollaire 2.2.12. *On suppose I non borné et $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors on a*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0.$$

Exercice 4.14. *Montrez le corollaire 2.2.12.*

Corollaire 2.2.13. (Dérivation d'un produit). *Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(I)$ et*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

De plus, on a la formule d'intégration par parties

$$\forall x, y \in \bar{I}, \qquad \int_x^y u'v = u(y)v(y) - u(x)v(x) - \int_x^y uv'.$$

Exercice 4.15. *On se propose de prouver le corollaire précédent.*

1. *Si $u, v \in W^{1,p}(I)$, montrez que $uv \in L^p$.*
2. *Montrez le corollaire si $1 \leq p < +\infty$.*
3. *Montrez le théorème si $p = \infty$.*

Corollaire 2.2.14. (Dérivation d'un produit de composition.) *Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $G(0) = 0$ et soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \qquad \text{et} \qquad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Exercice 4.16. *On se propose de montrer le corollaire précédent. Soit $M = \|u\|_{L^\infty}$.*

1. *Montrer qu'il existe une constante C telle que*

$$\forall s \in [-M, +M], \qquad |G(s)| \leq C|s|.$$

2. *Montrer que $G \circ u$ et $(G' \circ u)u'$ sont dans $L^p(I)$.*
3. *Conclure si $p < +\infty$, puis si $p = +\infty$.*

On définit maintenant les espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$.

Définition 2.2.15. (Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$). Etant donnés un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq +\infty$, on définit par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I);\ u' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que $u \in W^{m,p}(I)$ si et seulement s'il existe m fonctions $g_1, \ldots, g_m \in L^p(I)$ telles que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int u\varphi^{(j)} = (-1)^j \int g_j \varphi.$$

On note donc

$$u^{(j)} = g_j, \qquad \forall j = 1, \ldots, m.$$

L'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{m} \|u^{(j)}\|_{L^p}$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^{m} \langle u^{(\alpha)}, v^{(\alpha)}\rangle_{L^2}.$$

Exercice 4.17. *Montrez que* $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$ *et que cette injection est continue.*

2.3. L'espace $W_0^{1,p}(I)$.

Définition 2.3.1. Etant donné $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$; l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.

Exercice 4.18. *Montrez que les espaces* $W_0^{1,p}$ *sont des espaces de Banach séparables, et que* H_0^1 *est un espace de Hilbert séparable.*

Exercice 4.19. *Montrez que* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.20. *Montrez, en utilisant une suite régularisante* (ρ_n) *que*

i. $\mathcal{D}(I)$ *est dense dans* $W_0^{1,p}(I)$

ii. si $u \in W^{1,p}(I)$ *est à support compact inclus dans* I*, alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle des fonctions de $W_0^{1,p}(I)$:

Théorème 2.3.2. *Soit* $u \in W^{1,p}(I)$*, alors* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *si et seulement si* $u = 0$ *sur* ∂I.

Exercice 4.21. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Montrez que si* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *alors* $u = 0$ *sur* ∂I.

2. *Soit* $u \in W^{1,p}(I)$ *tel que* $u = 0$ *sur* ∂I*. On fixe une fonction* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *telle que*

$$G(t) = \begin{cases} 0 & si\ |t| \leq 1, \\ t & si\ |t| \geq 2 \end{cases}$$

et

$$|G(t)| \leq |t|, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On pose $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$*. Montrez que* $u_n \in W_0^{1,p}$ *et que* $u_n \to u$ *dans* $W^{1,p}$.

Théorème 2.3.3. (Inégalité de Poincaré). *On suppose que* I *est borné. Alors il existe une constante* C *(dépendant de* $|I|$*) telle que*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(I), \qquad \|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}.$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$*, la quantité* $\|u'\|_{L^p}$ *est une norme équivalente à la norme de* $W^{1,p}$*.*

Exercice 4.22. *On se propose de montrer le théorème précédent. Soit* $a \in \partial I$ *et* $x \in I$*. En utilisant l'égalité*

$$u(x) = \int_a^x u'(t)dt,$$

montrez que $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1}$*. Conclure.*

Remarque 2.3.4. *Si* I *est borné, l'expression* $\langle u', v'\rangle_{L^2}$ *définit un produit scalaire sur* H_0^1 *et la norme associée, c'est-à-dire* $\|u'\|_{L^2}$ *est une norme équivalente à celle de* H_0^1*.*

Remarque 2.3.5. *Etant donnés un entier* $m \geq 2$ *et un réel* $1 \leq p < \infty$*, on définit l'espace* $W_0^{m,p}(I)$ *comme étant la fermeture de* $C_0^m(I)$ *(espace des fonctions de classe* C_m *à support compact inclus dans* I*) dans* $W^{m,p}(I)$*. On montre (exercice 4.23 : le vérifier) que*

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I),\ u = u' = \cdots = u^{(m-1)} = 0 \text{ sur } \partial I\}.$$

Il convient de bien distinguer

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I),\ u = u' = 0 \text{ sur } \partial I\}.$$

et

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I),\ u = 0 \text{ sur } \partial I\}.$$

2.4. Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram.

A partir de maintenant, H désigne un espace de Hilbert.

Définition 2.4.1. On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est

i. *continue* s'il existe une constante C telle que

$$\forall u, v \in H, \qquad |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$$

ii. *coercive* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in H, \qquad a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2.$$

Théorème 2.4.2. (Théorème de Stampacchia.) *Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Soit K un convexe, fermé non vide. Etant donné $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que*

$$\forall v \in K, \qquad a(y, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \tag{1}$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in K$$

et

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u \rangle \right\}. \tag{2}$$

Exercice 4.24. *On se propose de montrer le théorème de Stampacchia.*

1. *Montrez qu'il existe une application linéaire $A : H \to H$ telle que,*

$$\forall u, v \in H, \qquad a(u,v) = \langle A(u), v \rangle$$

et que

$$\forall u \in H, \qquad \|A(u)\| \leq C\|u\|, \tag{3}$$

$$\forall u \in H, \qquad \langle A(u), u \rangle \geq \alpha \|u\|^2. \tag{4}$$

2. *Soit $\rho > 0$ une constante. Montrez que le problème (1) revient à trouver $u \in K$ tel que*

$$\forall v \in K, \qquad \langle \rho f - \rho A(u) + u - u, v - u \rangle \leq 0,$$

soit encore à trouver $u \in K$ tel que

$$u = P_K(\rho f - \rho A(u) + u)$$

où P_K désigne la projection orthogonale sur le convexe complet K.

3. *Pour tout $v \in K$, on pose*

$$S(v) = P_K(\rho f - \rho A(v) + v).$$

Montrez que

$$\forall v_1, v_2 \in K, \qquad \|S(v_1) - S(v_2)\| \leq \|(v_1 - v_2) - \rho A(v_1 - v_2)\|.$$

En déduire que

$$\forall v_1, v_2 \in K, \qquad \|S(v_1) - S(v_2)\|^2 \leq \|v_1 - v_2\|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)$$

puis qu'il existe $\rho > 0$ tel que S soit une contraction sur K. Conclure.

4. *Supposons maintenant a symétrique. Montrez qu'il existe $g \in H$ tel que*

$$\forall v \in K, \qquad \langle f, v\rangle = a(g, v).$$

Montrez que (1) devient

$$\forall v \in K, \qquad a(g-u, v-u) \leq 0,$$

ce qui équivaut à trouver $u \in K$ tel que

$$a(g-u, g-u) = \min_{v \in K} a(g-v, g-v).$$

Conclure.

Corollaire 2.4.3. (Théorème de Lax-Milgram). *Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $f \in H$, il existe $u \in H$ unique tel que*

$$\forall v \in H, \qquad a(u, v) = \langle f, v\rangle.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisée par la propriété

$$u \in H, \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle = \min_{v \in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle\right\}.$$

Exercice 4.25. *Prouver le théorème de Lax-Milgram.*

Remarque 2.4.4. *Si on écrit $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle$ alors la différentielle de F en u est nulle si et seulement si*

$$\forall v \in H, \qquad a(u, v) = \langle f, v\rangle.$$

2.5. Quelques exemples de problèmes aux limites.

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0, 1[\\ u(0) = 0 & u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction donnée (par exemple dans $C(\bar{I})$ ou bien dans $L^2(I)$). La condition aux limites $u(0) = u(1) = 0$ s'appelle la condition de Dirichlet (homogène dans ce cas).

Définition 2.5.1. Une *solution classique* de (1) est une fonction $u \in C^2(\bar{I})$ vérifiant (1) au sens usuel. Une *solution faible* de (1) est une fonction $u \in H_0^1(1)$ vérifiant

$$\forall v \in H_0^1(I), \qquad \int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \tag{2}$$

Mettons en marche le programme décrit au paragraphe 2.1.

A. Toute solution classique est solution faible : ceci est évident grâce à la formule d'intégration par parties (corollaire 2.2.13.)

B. Existence et unicité d'une solution faible :

Proposition 2.5.2. (Principe de Dirichlet). *Pour tout $f \in L^2$, il existe $u \in H_0^1$ unique solution de* (2)*. De plus, u s'obtient par*

$$\min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Cette proposition découle du théorème de Lax-Milgram.

C et D. Régularité et retour à la solution classique : notons tout d'abord que si $f \in L^2$ et si $u \in H_0^1$ est solution faible, alors $u \in H^2$. En effet, on a

$$\forall v \in C_0^1(I), \qquad \int u'v' = \int (f-u)v$$

et donc $u' \in H^1$ puisque $(f-u) \in L^2$, ce qui implique que $u \in H^2$. Si de plus, $f \in C(\bar{I})$, alors la solution faible u appartient à $C^2(\bar{I})$. En effet $(u')' \in C(\bar{I})$ et donc $u' \in C^1(\bar{I})$; par suite $u \in C^2(\bar{I})$. Le passage d'une solution faible $u \in C^2(\bar{I})$ à une solution classique s'effectue comme au paragraphe 2.1.

Exercice 4.26. *Montrez par récurrence sur $k \geq 1$ que si $f \in H^k(I)$, la solution u de* (2) *appartient à $H^{k+2}(I)$.*

La méthode décrite ci-dessus est extrêmement flexible et s'adapte à une multitude de problèmes. Nous indiquons un autre exemple d'application.

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0,1[\\ u(0) = \alpha & u(1) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction donnée, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Proposition 2.5.3. *Etant donnés $f \in L^2(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H^2(I)$ unique vérifiant (1). De plus u s'obtient par*

$$\min_{\substack{v \in H^1 \\ v(0)=\alpha,\ v(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

De plus, si $f \in C(\bar{I})$ alors $u \in C^2(\bar{I})$.

Preuve. Dans l'espace H^1, on introduit le convexe fermé

$$K = \{v \in H^1(I),\ v(0) = \alpha,\ v(1) = \beta\}$$

Si u est une solution classique de (1), on a

$$\forall v \in K, \qquad \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) = \int_I f(v-u),$$

donc

$$\forall v \in K, \qquad \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geq \int_I f(v-u). \tag{2}$$

Le théorème de Stampacchia nous donne l'existence et l'unicité de $u \in K$ vérifiant la dernière inégalité. De plus, u s'obtient par

$$\min_{\substack{v \in H^1 \\ v(0)=\alpha,\ v(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Pour remonter à une solution classique, on choisit dans (2) $v = u \pm w$ avec $w \in H_0^1(I)$ et on obtient

$$\forall w \in H_0^1(I), \qquad \int_I u'w' + \int_I uw = \int_I fw.$$

Ceci implique $u \in H^2(I), \ldots$

3. Espaces de Sobolev en dimension $N \geq 2$.

3.1. Définition et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \bar{\mathbb{R}}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 3.1.1. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \Bigg\{ u \in L^p(\Omega),\ \exists g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall i = 1, \dots, N \Bigg\}.$$

C'est aussi l'ensemble

$$\{u \in L^p(\Omega),\ \forall i = 1, \dots, N,\ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ au sens des distributions est dans } L^p(\Omega)\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$$

où les g_i sont les fonctions intervenant dans la première définition. De plus, cette définition a bien un sens car les g_i sont uniques à égalité presque partout près. Enfin, on note

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in L^p(\Omega)^N.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

si $1 \leq p < +\infty$. L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \right\rangle_{L^2}$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Proposition 3.1.2. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et séparable pour $1 \leq p < +\infty$.*

Exercice 4.27. *Prouver la proposition précédente.*

Remarque 3.1.3. *Il est clair que si $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ et si $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, N$ (ici $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle de u au sens usuel), alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$; de plus les dérivées partielles au sens usuelles conïncident avec les dérivées partielles au sens $W^{1,p}$. En particulier, si Ω est borné, alors $C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Exercice 4.28. *Montrez qu'inversement, si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et si $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ ($\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$ désigne la dérivée partielle au sens de $W^{1,p}$), alors $u \in C^1(\Omega)$.*

Exercice 4.29. *Soit (u_n) une suite de $W^{1,p}$ telle que $u_n \to u$ dans L^p et ∇u_n converge vers une limite dans $(L^p)^N$. Montrez que $u \in W^{1,p}$ et $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0$. Lorsque $1 < p \leq \infty$, montrez qu'il suffit de savoir que $u_n \to u$ dans L^p et que (∇u_n) reste borné dans $(L^p)^N$ pour conclure que $u \in W^{1,p}$.*

Exercice 4.30. *Soit f une fonction définie sur Ω. On désigne par $\overline{f}$ son prolongement par 0 en dehors de Ω. Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et u de classe C^1 à support compact dans Ω. Montrez qu'on n'a pas forcément $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ mais que, par contre,*

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}.$$

On se propose de montrer le théorème suivant, qui est un résultat important de densité :

Théorème 3.1.4. (Friedrichs) *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une suite (u_n) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\begin{array}{lll} i. & u_{n|\Omega} \to u & \text{dans } L^p(\Omega) \\ ii. & \nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega} & \text{dans } L^p(\omega)^N \quad \text{pour tout } \omega \subset\subset \Omega. \end{array}$$

De plus, si $u \in L^\infty(\Omega)$, alors on peut choisir (u_n) telle que l'on ait de plus $\|u_n\|\infty \leq \|u\|_\infty$. (rappelons que la notation $\omega \subset\subset \Omega$ qui se lit ω est relativement compact dans Ω signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$ et $\overline{\omega}$ est compact.)

Exercice 4.31. *On se propose de prouver le théorème 3.1.4.*

1. *Montrez que, si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * v) = \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N.$$

2. *On note $\overline{u}$ le prolongement de u par 0 sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ et on note $v_n = \rho_n * \overline{u}$ où ρ_n est une suite régularisante. Montrez que $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $v_n \to \overline{u}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

3. *Soit $\omega \subset\subset \Omega$. On fixe une fonction $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ telle que $\alpha = 1$ dans un voisinage de ω. Montrez que, pour n assez grand, on a $\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u}$ sur ω. En déduire que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^p(\omega)$.*

4. *Conclure.*

Le théorème suivant est une caractérisation simple des fonctions de $W^{1,p}$ analogue au théorème 2.2.6 :

Théorème 3.1.5. *Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. $u \in W^{1,p}(\Omega)$

ii. Il existe une constante C telle que

$$\left| \int_I u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

où p' est tel que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

iii. Il existe une constante C telle que, pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ avec $\|h\| < d(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, on a

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^p(\omega)} \leq C\|h\|.$$

De plus, on peut choisir $C = \|\nabla u\|_{L^p(I)}$ dans ii et iii.

Exercice 4.32. *On se propose de montrer le théorème précédent.*

1. *Montrez que (i) implique (ii).*
2. *Montrez, en s'inspirant de l'exercice 4.8. que (ii) implique (i).*
3. *On se propose de montrer que (i) implique (iii). Commençons par supposer $p < +\infty$ et que $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Soit $h \in \mathbb{R}^N$ et posons $v(t) = u(x + th)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrez que*

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq \|h\|^p \int_0^1 \|\nabla u(x+th)\|^p dt.$$

Fixant $\|h\| <$ dist $(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, il existe un ouvert $\omega' \subset\subset \Omega$ tel que $\omega + th \subset \omega'$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrez que

$$\|u(\cdot + h) - u\|^p_{L^p(\omega)} \leq \|h\|^p \int_{\omega}' \|\nabla u\|^p.$$

En déduire grâce au théorème 3.1.4, (iii) pour $p < +\infty$, puis pour $p \leq +\infty$.

4. *Montrez que (iii) implique (ii).*

Théorème 3.1.6. (Dérivation d'un produit). *Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Exercice 4.33. *En utilisant le théorème 3.1.4, montrez le théorème précédent si $p < +\infty$. Conclure.*

Théorème 3.1.7. (Dérivation d'un produit de composition). *Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et $|G'(s)| \leq M$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \qquad et \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Exercice 4.34. *On se propose de montrer le théorème 3.1.7.*

1. *Montrez que* $G \circ u$ *et* $(G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$.
2. *En utilisant une suite* (u_n) *d'éléments de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *qui approche* u *de manière convenable, montrez le théorème pour* $1 \leq p < \infty$.
3. *Pour* $p = \infty$*, montrez le théorème en remarquant que pour tout* Ω' *borné de* Ω*, on a* $u \in W^{1,p}(\Omega')$ *pour tout* $p < +\infty$.

De manière analogue à la dimension 1, on introduit les espaces $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 3.1.8. Soient $m \geq 2$ un entier et p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$. On définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots N \right\}.$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que}$$
$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Big\}.$$

où $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$. On note $D^\alpha u = g_\alpha$. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach. On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$$

est un espace de Hilbert. Enfin, on définit l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 3.1.9. L'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ est l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Exercice 4.35. *Montrez que* $W_0^{1,p}$ *est un espace de Banach, et que*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Remarque 3.1.10. *Nous avons vu qu'en dimension 1,* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *était l'espace des éléments* $W^{1,p}(\Omega)$ *qui sont nuls sur* $\partial\Omega$*. En dimension supérieure, cette* *caractérisation est malheureusement fausse. La raison principale est qu'en dimension supérieure, les éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ n'admettent malheureusemment pas de représentant continu en général. Et donc, dire que u est nulle sur $\partial\Omega$ sachant que u est définie presque partout et que $\partial\Omega$ est de mesure nulle n'implique rien de particulier sur u si u n'est pas continue. On verra dans les applications qu'on peut néanmoins contourner ce problème grâce aux deux résultats suivants.*

Exercice 4.36. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω. Montrez que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Théorème 3.1.11. *On suppose Ω de classe C^1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{array}{ll} (i) & u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ (ii) & u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array}$$

Exercice 4.36. *On se propose de montrer que (i) implique (ii) dans le théorème 3.1.11. Supposons d'abord supp u borné. On fixe une fonction $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $|G(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et*

$$G(t) = \begin{cases} 0 & si\ |t| \leq 1 \\ t & si\ |t| \geq 2. \end{cases}$$

Montrez que $u_n = \frac{1}{n}G(nu) \in W^{1,p}$, que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$, $u_n \in W_0^{1,p}$ et $u \in W_0^{1,p}$. Puis, dans le cas où Ω n'est pas borné, considérez une suite "tronquée" u_n de u.

Nous allons maintenant montrer que (ii) implique (i). On note

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^N &= \{x = (x', x_N);\ x_N > 0\} \\ Q &= \{x = (x', x_N); \|x'\| < 1 \text{ et } |\ x_N| < 1\} \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}_+^N \\ Q_0 &= \{x = (x', x_N); \|x'\| < 1 \text{ et } \ x_N = 0\}. \end{aligned}$$

Par cartes locales, on se ramène au problème suivant. Soit $u \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap C(Q_+)$; montrer que $u = 0$ sur Q_0. Soit u_n une suite de $\mathcal{D}(Q_+)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(Q_+)$. On a, pour $(x', x_N) \in Q_+$,

$$|u_n(x'x_N)| \leq \int_0^{x_N} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t) \right| dt.$$

et donc pour $0 < \varepsilon < 1$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\|x'\|<1}\int_0^\varepsilon |u_n(x';x_N)|dx'dx_N \leq \int_{\|x'\|<1}\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x',t)\right| dt\, dx'.$$

A la limite, quand $n \to +\infty$ ($\varepsilon > 0$ fixé), on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\|x'\|<1}\int_0^\varepsilon |u(x';x_N)|dx'dx_N \leq \int_{\|x'\|<1}\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',t)\right| dt\, dx'.$$

Enfin, quand $\varepsilon \to 0$, il vient

$$\int_{\|x'\|<1} |u(x',0)|dx' = 0$$

car $u \in C(\overline{Q}_+)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_N} \in L^1(Q_+)$. Donc $u = 0$ sur Q_0. Ce qui termine la preuve du théorème 3.1.11.

L'inégalité de Poincaré quant à elle se généralise sans problème en dimension supérieure.

Théorème 3.1.12. (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Il existe une constante $c(\Omega) > 0$ telle que, pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on ait*

$$\int_\Omega |u|^p \leq c(\Omega)^p \int_\Omega \|\nabla u\|^p$$

où $1 \leq p < \infty$.

Exercice 4.37. *On se propose de montrer le théorème 3.1.10.*

1. *Montrez qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, $|x_1| \leq a$.*
2. *Soit $u \in D(\Omega)$. Montrez que*

$$\forall x \in \Omega, \qquad u(x) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_N)dt.$$

En déduire l'inégalité de Poincaré si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, puis conclure.

3.2. Un exemple de problème aux limite : Le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson.

Revenons au problème initial : Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 borné et S le bord de Ω. Considérons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } S \end{cases} \tag{1}$$

où f est donnée sur Ω et $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ est l'inconnue. Une solution classique de (1) est une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (1). Une solution faible de (1) est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv. \tag{2}$$

Mettons en œuvre le programme décrit précédemment.

A. Toute solution classique est une solution faible. En effet, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et donc $u \in H_0^1(\Omega)$ grâce au théorème 3.1.11. D'autre part, si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv,$$

et cette égalité reste vraie pour $v \in H_0^1$ par densité.

B. Existence et unicité de la solution faible. C'est le principe de Dirichlet (Théorème 1.2 au début de ce chapitre). Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution faible de (31). De plus u s'obtient par

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega fu = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega fv \right\}.$$

C'est une conséquence directe du théorème de Lax-Milgram.

C. La solution faible est suffisamment régulière. Cette question est difficile, nous ne l'aborderons pas.

D. Admettons que la solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de (31) appartienne à $C^2(\bar{\Omega})$ et supposons Ω de classe C^1. Alors $u = 0$ sur $\partial\Omega$ grâce au théorème 3.1.11. D'autre part, on a

$$\int_\Omega -\Delta u v = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et donc $-\Delta u = f$ presque partout sur Ω. En fait, on a alors égalité partout sur Ω car $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et donc u est une solution classique.

4. Corrigé des exercices.

Exercice 4.1. En utilisant la formule de Green

$$\int_S w\partial_{\vec{n}} w d\sigma = \int_\Omega (w\Delta w + \nabla w \cdot \nabla w) dx,$$

compte tenu du du fait que $x = 0$ sur S, on a l'identité demandée. On a donc $\nabla w = 0$ dans Ω, ce qui implique que w est constante dans Ω car Ω est connexe. Comme $w = 0$ sur S, on a $w = 0$ dans Ω.

Exercice 4.2.

1. On a $-\Delta u - f = 0$ d'où la première identité. On a

$$\int_S (u-w)\partial_{\vec{n}} u d\sigma = \int_\Omega ((u-w)\Delta u + \nabla(u-w) \cdot \nabla u) dx.$$

Or $u - w = 0$ sur S donc

$$\int_\Omega -\Delta u(u-w) dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-w) dx.$$

La deuxième identité en découle. L'égalité suivante est alors claire. Enfin, l'inégalité suivante découle du fait que $\nabla u \cdot \nabla v \le \|\nabla u\| \|\nabla v\| \le \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla w\|^2)$. (2) est alors claire.

2. On a

$$i(\tau) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + \tau \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2}\tau^2 \|\nabla v\|^2 - uf - \tau v f \right) dx$$

ce qui montre que i est un trinôme, donc dérivable. Si i est minimale en 0, alors nécessairement, $i'(0) = 0$. Or

$$i'(\tau) = \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v + \tau \|\nabla v\|^2 - vf \right) dx$$

donc

$$i'(0) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - vf)\, dx = 0.$$

Comme $v = 0$ sur S, l'identité de Green nous donne

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = -\int_\Omega (\Delta u) v \; dx.$$

donc

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)v\, dx = 0.$$

Comme ceci est vrai quel que soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\Delta u = -f$, et donc on a (1).

Exercice 4.3. La preuve est classique. Supposons qu'il existe x_0 dans $]a,b[$ tel que $(-u''+u-f)(x_0)$ soit différent de 0. Supposons $(-u''+u-f)(x_0) \geq \varepsilon > 0$. Il existe un intervalle fermé I inclus dans $]a,b[$ tel que $-u''+u-f \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Il est connu qu'il existe une fonction φ de classe C^1 à support inclus dans l'ouvert $\{x \in]a,b[, (-u''+u-f)(x) > 0\}$ qui vaut 1 sur I. On a alors

$$\int_0^1 (-u''+u-f)\varphi > 0,$$

ce qui est absurde.

Exercice 4.5. Il suffit de comparer les quantités $x+y$ et $(x^p+y^p)^{1/p}$ si $x, y \geq 0$ et $p > 1$.

Montrons tout d'abord que $(x^p+y^p)^{1/p} \leq x+y$. Il suffit de montrer que, pour tous $x, y \geq 0$ et tout $p > 1$, on a $x^p + y^p \leq (x+y)^p$. Fixons $y \geq 0$ et $p > 1$. Définissons sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $f(x) = (x+y)^p - x^p - y^p$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $f'(x) = p((x+y)^{p-1} - x^{p-1})$ qui est positive car $y \geq 0$ et l'application $x \mapsto x^{p-1}$ est croissante. Il en résulte que, poour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0) = 0$.

Etablissons maintenant une inégalité inverse. Pour cela, on utilise l'inégalité de Hölder. Si $n > 1$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres positifs, alors

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{p'}\right)^{1/p'}$$

où p' est tel que $1/p + 1/p' = 1$. Faisons ici $n = 2$, $a_1 = x$, $a_2 = y$, $b_1 = b_2 = 1$. On a alors

$$x + y \leq (x^p + y^p)^{1/p} 2^{1/p'}.$$

Cela démontre donc l'équivalence des normes.

Exercice 4.6.

1. Soit (u_n) une suite de Cauchy pour la norme de $W^{1,p}$ alors (u_n) et (u_n') sont des suites de Cauchy de $L^p(I)$. On en déduit qu'il existe $u, v \in L^p(I)$ tels que $u_n \to u$ et $u_n' \to v$ dans $L^p(I)$. Pour conclure, il

suffit de montrer que $u' = v$ au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. On a
$$\int_I u_n'\varphi = -\int_I u_n\varphi'.$$
Or
$$\int_I |u_n - u||\varphi'| \leq \|u_n - u\|_p\|\varphi'\|_{p'} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$
ce qui prouve que
$$\int_I u_n\varphi' \to \int_I u\varphi'.$$
De même, on a
$$\int_I u_n'\varphi \to \int_I v\varphi$$
donc
$$\int_I u'\varphi = -\int_I v\varphi',$$
ce qui prouve bien que $u' = v$ au sens des distributions.

2. La famille $(a_{m,n})$ ainsi construite est au plus dénombrable car $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable. Montrons qu'elle est dense dans F. Soit $x \in F$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que la boule $B_F(x,\varepsilon)$ dans F contient un élément $a_{m,n}$. Soit m tel que $1/(m+1) < \varepsilon$. On sait que la boule $B_{\frac{1}{m+1}}(x)$ dans E contient un élément u_n. Comme $x \in F$ et $x \in B_{\frac{1}{m+1}}(u_n)$, l'intersection $F \cap B(u_n, \frac{1}{m+1})$ contient donc x et un élément $a_{m,n}$ ce qui implique que $a_{m,n} \in B_F(x,\varepsilon)$.
$T : W^{1,p} \to L^p \times L^p$ ainsi définie est une application linéaire continue de $W^{1,p}$ dans $T(W^{1,p})$. Comme L^p est séparable, $L^p \times L^p$ l'est aussi ainsi que $T(W^{1,p})$ d'après la question précédente. Il existe une suite (u_n) de $W^{1,p}$ telle que la suite (u_n, u_n') soit dense dans $T(W^{1,p})$, ce qui montre que la suite (u_n) est dense dans $W^{1,p}$.

Exercice 4.7.

1. Si $I =]a,b[$ avec $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, on prend $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ et on pose
$$\phi(t) = \int_a^t \varphi(u)du - \left(\int_a^b \varphi(u)du\right)\psi(t)$$
où $\theta \in \mathcal{D}(I)$ et $\psi(t) = \int_a^t \theta(u)du / \int_a^b \theta(u)du$. Alors ϕ est à support compact. On a
$$\int_a^b f\phi' = 0,$$

donc
$$\int_a^b \left(f(t)\varphi(t) - \left(\int_a^b \varphi \right) f(t)\psi'(t) \right) dt = 0.$$
donc
$$\int_a^b f\varphi = \left(\int_a^b \varphi \right) \int_a^b f\psi',$$
donc
$$f = \int_a^b f\psi'$$
au sens des distributions.

2. On écrit que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a
$$\int_I v\varphi' = -\int_{x=a}^{x=y_0} \int_{t=x}^{t=y_0} g(t)\varphi'(x)dt\,dx + \int_{x=y_0}^{x=b} \int_{t=y_0}^{t=x} g(t)\varphi'(x)dt\,dx$$
et on applique le théorème de Fubini. Comme φ est à support compact, on peut supposer que a et b sont finis. La fonction g est donc intégrable sur le compact $[x, y_0]$ et φ est intégrable sur les compacts $[a, y_0]$ et $[y_0, b]$. Le théorème de Fubini s'applique et on a donc

$$\begin{aligned}
\int_I v\varphi' &= -\int_{x=a}^{x=y_0} \int_{t=x}^{t=y_0} g(t)\varphi'(x)dt\,dx + \int_{x=y_0}^{x=b} \int_{t=y_0}^{t=x} g(t)\varphi'(x)dt\,dx \\
&= -\int_{t=a}^{t=y_0} \int_{x=a}^{x=t} g(t)\varphi'(x)dt\,dx + \int_{t=y_0}^{t=b} \int_{x=t}^{x=b} g(t)\varphi'(x)dt\,dx \\
&= -\int_{t=a}^{t=y_0} g(t) \left(\int_{x=a}^{x=t} \varphi'(x)dx \right) dt + \int_{t=y_0}^{t=b} g(t) \left(\int_{x=t}^{x=b} \varphi'(x)dx \right) dt \\
&= -\int_{t=a}^{t=y_0} g(t)\varphi(t)\,dt - \int_{t=y_0}^{t=b} g(t)\varphi(t)\,dt \\
&= -\int_{t=a}^{t=b} g(t)\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

4. La fonction u' est dans L^p donc dans L^1_{loc}. Fixons $x_0 \in I$ et posons $\overline{u}(x) = \int_{x_0}^x u'(t)dt$. D'après la question précédente, la fonction u est continue sur I et sa dérivée au sens des distributions est u'. La fonction $u - \overline{u}$ est donc constante presque partout d'après la question (1), et donc $u = \overline{u} + C$ presque partout. On en déduit que u admet un représentant continu et que, pour ce représentant $\widetilde{u} = \overline{u} + C$, on a
$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt.$$

Exercice 4.8.

1. L'inégalité de Hölder nous donne

$$\left|\int_I u\varphi'\right| = \left|\int_I u'\varphi\right| \leq \int_I |u'||\varphi| \leq \|u'\|_p \|\varphi\|_{p'}.$$

2. Supposons i. La forme linéaire donnée est alors continue sur $L^{p'}$. Comme pour $1 < p \leq +\infty$, le dual de $L^{p'}$ est L^p, il existe $v \in L^p$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int_I v\varphi = \int_I u\varphi'$$

ce qui implique que $-v$ est dérivée de u au sens des distributions et est élément de L^p; donc $u \in W^{1,p}$.

3. L'intervalle $]x - d(\omega, \mathbb{R} \setminus I), x + d(\omega, \mathbb{R} \setminus I)[$ est inclus dans I. Donc

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^h u'(x+s)ds$$

car u est assimilé à son représentant continu. Un changement de variable nous donne donc

$$u(x+h) - u(x) = h \int_0^h u'(x+hs)ds.$$

En particulier,

$$\|u(\cdot + h) - u\|_{L^\infty(\omega)} \leq |h| \|u'\|_\infty.$$

Si $1 < p < +\infty$, on applique l'inégalité de Hölder

$$\int_0^1 |u'(x+sh)|ds \leq \left(\int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds\right)^{1/p} \left(\int_0^1 1^{p'}\right)^{1/p'}$$

donc

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

En particulier

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \int_0^1 \int_\omega |u'(x+sh)|^p dx ds$$

$$\leq |h|^p \int_0^1 \|u'\|_{L^p(I)} ds \leq |h|^p \|u'\|_{L^p}.$$

On en déduit *iii*.

4. On a

$$\int_I u(x+h)\varphi(x)dx = \int_\omega u(x+h)\varphi(x)dx$$
$$= \int_{\omega+]-h,h[} u(x)\varphi(x-h)dx = \int_I u(x)\varphi(x-h)dx.$$

La première identité en découle. On a alors

$$\left|\int_I [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)dx\right| \leq \|u(\cdot+h)-u\|_{L^p(\omega)}\|\varphi\|_{L^{p'}} \leq C|h|\|\varphi\|_{L^{p'}}$$

Utilisant la première identité, on a

$$\left|\int_I u(x)[\varphi(x-h)-\varphi(x)]dx\right| \leq C|h|\|\varphi\|_{L^{p'}}$$

et donc

$$\left|\int_I u(x)\left[\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\right]dx\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall |h| < d(\omega, \mathbb{R}\setminus I), \qquad \left|\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\right| \leq \|\varphi'\|_\infty \mathbb{1}_{\mathrm{supp}\ \varphi}(x)$$

D'après le théorème de la convergence dominée, comme

$$\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h} \longrightarrow_{h\to 0} -\varphi'(x),$$

on a

$$\left|\int u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Exercice 4.9. Si $u \in W^{1,\infty}$ alors $u' \in L^\infty$ et

$$\forall x, y \in I, \qquad |u(x)-u(y)| = \left|\int_y^x u'\right| \leq \|u'\|_\infty |x-y].$$

Réciproquement, si u vérifie cette condition, alors on a *iii* avec $p=\infty$ donc $u \in W^{1,\infty}$.

Exercice 4.10.

1. Supposons $I =]a, +\infty[$. Supposons avoir construit un opérateur de prolongement P pour $J =]0, +\infty[$ possédant les propriétés i, ii et iii du théorème pour J. Notons τ_a l'opérateur qui à $u \in W^{1,p}(I)$ associe $\tau_a u \in W^{1,p}(J)$ défini par $\tau_a u(x) = u(x+a)$. Notons $P' = \tau_{-a} \circ P \circ \tau_a$. En particulier, on a i, ii et iii pour I. Si maintenant $I =]-\infty, b[$ alors on fait la même chose à ceci près : on remplace τ_a par σ_b définie par $\sigma_b u(x) = u(b-x)$.
L'opérateur P construit pour $I =]0, +\infty[$ vérifie clairement les propriétés i, ii et iii.

2. La même démarche qu'à la question précédente nous montre qu'on peut se ramener au cas où $I =]0, 1[$.

2.1. Il est clair que $\eta\widetilde{u} \in L^p]0, +\infty[$. Au sens des distributions, on a

$$(\eta\widetilde{u})' = \eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u}'$$

qui est aussi dans $L^p]0, +\infty[$ donc $\eta\widetilde{u} \in W^{1,p}(]0, +\infty[)$.

2.2. On pose $v_1 = P(\eta\widetilde{u})$. On a clairement les propriétés énoncées.

2.3. On procède de manière analogue avec $(1-\eta)u$, c'est-à-dire que l'on prolonge d'abord $(1-\eta)u$ à $]-\infty, 1[$ par 0 sur $]-\infty, 0[$ et ensuite on prolonge à $\mathbb{R}$ par une réflexion (par rapport au point 1). v_2 est le prolongement ainsi obtenu qui vérifie les conditions.

2.4. $Pu = v_1 + v_2$ répond à la question.

Exercice 4.11.

1. Il suffit de prolonger u en une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ grâce au théorème 2.2.8.

2. Tout d'abord, comme le produit de convolution d'une fonction ρ de L^1 avec une fonction $v \in L^p$ est dans L^p, on a $\rho * v$ et $\rho * v'$ qui sont des éléments de L^p. Il suffit de montrer que $(\rho * v)' = \rho * v'$ pour conclure. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$-\int_x (\rho * v)(x)\varphi'(x)dx = -\int_x \int_t \rho(t)v(x-t)\varphi'(x)dx.$$

Or, pour presque tout x, la fonction $t \mapsto \rho(t)v(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (voir un cours quelconque sur le produit de convolution d'une fonction de L^1 par une fonction de L^p. Le théorème de Fubini peut alors s'appliquer et le terme précédent vaut

$$-\int_t \rho(t)\left(\int_x v(x-t)\varphi'(x)dx\right)dt.$$

Utilisant le fait que

$$-\int_x v(x-t)\varphi'(x)dx = \int_x v'(x-t)\varphi(x)dx,$$

on en déduit aisément le résultat.

3. On vérifie aisément grâce au théorème de la convergence dominée, que si une fonction $f \in L^p$ avec $1 \le p < \infty$ alors $\zeta_n f \to f$ dans L^p. Montrons que la suite $u_n = \zeta_n \times (\rho_n * u)$ définie dans l'énoncé converge vers u dans $W^{1,p}$. Tout d'abord, on a $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$. En effet, on écrit

$$u_n - u = \zeta_n[(\rho_n * u) - u] + [\zeta_n u - u]$$

et donc

$$\|u_n - u\|_{L^p} \le \|\rho_n * u - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \longrightarrow 0$$

Ensuite, grâce à la question 1, on a

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u'),$$

et donc

$$\begin{aligned}\|u_n' - u'\|_{L^p} &\le \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p}\\ &\le \frac{\|\zeta'\|}{n}\|u\|_{L^p} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Exercice 4.12.

1. Il suffit d'appliquer le théorème de prolongement 2.2.8.

2.1. La fonction w est de classe C^1 à support compact car G est de classe C^1. On a

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v',$$

d'où l'égalité demandée.

2.2. La première inégalité découle de l'inégalité de Hölder. De l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

où $1/p + 1/p' = 1$, on déduit la seconde inégalité, sachant que, pour tout $p \geq 1$, on a $p^{1/p} \leq e^{1/e}$.

2.3. On raisonne ensuite par densité. Soit $u \in W^{1,p}$. Il existe une suite $(u_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Appliquant l'inégalité précédente, on voit que (u_n) est de Cauchy dans L^∞. Donc $u_n \to u$ dans L^∞ et on obtient le théorème 2.2.11.

Exercice 4.14. D'après le théorème 2.2.9, il existe une suite $(u_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_{n|I} \to u$ dans $W^{1,p}(I)$. On déduit du théorème 2.2.11 que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit n assez grand pour que $\|u_n - u\|_{L^\infty} < \varepsilon$. Or, pour $|x|$ assez grand, on a $u_n(x) = 0$ donc $|u(x)| < \varepsilon$.

Exercice 4.15.

1. Du théorème 2.2.11, il découle que $u \in L^\infty$ et donc $uv \in L^p$.

2. Soient (u_n) et (v_n) des suites de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $u_{n|I} \to u$ et $v_{n|I} \to v$ dans $W^{1,p}(I)$. Alors, d'après le théorème 2.2.11, $u_n \to u$ et $v_n \to v$ dans $L^\infty(I)$. Par conséquent $u_n v_n \to uv$ dans $L^\infty(I)$ et dans $L^p(I)$. On a

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \to u'v + uv' \qquad \text{dans } L^p(I).$$

Il en résulte que $uv \in W^{1,p}$ et que $(uv)' = u'v + uv'$. La seconde égalité découle de la première égalité, que l'on intègre entre x et y.

3. Supposons maintenant $p = \infty$. Alors

$$uv \in L^\infty(I) \qquad \text{et} \qquad u'v + uv' \in L^\infty(I).$$

Il reste à vérifier que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

Pour cela, on fixe un intervalle ouvert borné $J \subset I$ tel que supp $\varphi \subset J$. Alors, $u, v \in W^{1,p}(J)$ pour tout $p < \infty$ et d'après ce qui précède on sait que

$$\int_J uv\varphi' = -\int_J (u'v + uv')\varphi$$

c'est-à-dire

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

Exercice 4.16.

1. Cela découle de l'inégalité des accroissements finis.
2. Il découle de la question précédente que $G \circ u \in L^p$. De même, $(G' \circ u)u' \in L^p$.
3. Il reste à vérifier que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int_I (G \circ u)\varphi' = -\int_I (G' \circ u)u'\varphi.$$

Supposons tout d'abord que $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite (u_n) de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I)$ et dans $L^\infty(I)$. Donc $G \circ u_n \to G \circ u$ dans $L^\infty(I)$ et $(G' \circ u_n)u_n' \to (G' \circ u)u'$ dans $L^p(I)$. Or on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \qquad \int (G \circ u_n)\varphi' = -\int (G' \circ u_n)u_n'\varphi$$

D'où l'on déduit le corollaire pour $p < \infty$. Dans le cas où $p = \infty$, on procède comme pour le corollaire précédent.

Exercice 4.19. Découle du fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.21.

1. Si $u \in W_0^{1,p}$, il existe une suite (u_n) de $C^1(I)$ à supports compacts dans I telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(I)$. Donc $u_n \to u$ uniformément sur $\bar{I}$ et par conséquent, $u = 0$ sur ∂I.
2. $u_n \in W^{1,p}(I)$ grâce au corollaire 2.2.14. D'autre part, supp $u_n \subset \{x \in I; |u(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ et donc supp u_n est un compact inclus dans I (cela découle du fait que $u = 0$ sur ∂I et $u(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$, $x \in I$). Par conséquent, $u_n \in W_0^{1,p}$ grâce à l'exercice 3.20. Enfin, on vérifie aisément à l'aide du théorème de convergence dominée que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$.

Exercice y.22. Pour $u \in W_0^{1,p}(I)$, on a

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_{L^1}$$

donc $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$. Le théorème 2.3.3 en découle grâce à l'inégalité de Hölder.

Exercice 4.24.

1. D'après le théorème de représentation de Riesz, pour tout $u \in H$, il existe un unique $u' \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $a(u, v) = \langle u', v \rangle$. On note $u' = A(u)$. L'opérateur A ainsi défini est bien linéaire continu vérifiant (3) et (4).
2. Le problème (1) revient à trouver $u \in K$ tel que

$$\forall v \in K, \qquad \langle Au, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle$$

ce qui équivaut encore à ce qui est demandé.
3. La première inégalité découle du théorème de projection orthogonale sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert : Si K est un convexe fermé dans un espace de Hilbert, alors p_K est une application 1-Lipschitzienne. La deuxième inégalité s'obtient immédiatement en élevant la première au carré. Si on prend $0 < \rho < 2\alpha/C^2$, alors S est une contraction donc admet un point fixe unique.
4. $a(u, v)$ définit un nouveau produit scalaire sur H et la norme associée $a(u, u)^{1/2}$ est équivalente à la norme $\| \cdot \|$. Donc H est aussi un espace de Hilbert pour ce produit scalaire. Appliquons à nouveau le théorème de représentation de Riesz, on obtient $g \in H$ tel que

$$\forall v \in K, \qquad \langle f, v \rangle = a(g, v).$$

Le reste en découle aisément.

Exercice 4.31.

1. Reprendre la question 2 de l'exercice 3.11.
2. C'est bien connu.
3. Pour la première identité, cela découle du fait que

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u}) &= \operatorname{supp}[\rho_n * (1 - \overline{\alpha})\overline{u}] \\ &\subset \operatorname{supp} \rho_n + \operatorname{supp}(1 - \overline{\alpha})\overline{u} \subset B(0, \frac{1}{n}) + \operatorname{supp}\ (1 - \overline{\alpha}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \omega\end{aligned}$$

pour n assez grand.

On a alors, d'après l'exercice 3.30 et la question 1,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \left(\overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}\right)$$

et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u}$$

dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. En particulier

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

dans $L^p(\omega)$ et grâce au fait que

$$\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u}$$

sur ω, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{u}) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

dans $L^p(\omega)$.

4. Enfin, on "tronque" la suite (v_n) comme dans la démonstration du théorème 2.2.9 via l'exercice 3.11. plus précisément, on pose $u_n = \zeta_n v_n$. On vérifie aisément que la suite (u_n) a les propriétés souhaitées, c'est-à-dire $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^p(\omega)^N$.

Exercice 4.32. à 3.37. Tout à fait analogues aux exercices corrigés dans le cas où $N = 1$.