

Analyse à une variable complexe.

1. Séries entières.

Références: Gourdon, Analyse et Pommellet, Cours d'Analyse.

Notation : Dans tout ce qui suit, si $a \in \mathbb{C}$ et $R \geq 0$, nous notons :

- $D(a, R)$ le disque ouvert de centre a et de rayon R ($D(a, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < R\}$)
- $\overline{D}(a, R)$ le disque fermé de centre a et de rayon R ($\overline{D}(a, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq R\}$).
- $D'(a, R)$ le disque épointé de centre a et de rayon R ($D'(a, R) = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - a| < R\}$).

⊕ **Définition.** On appelle *série entière* toute série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ où z est une variable complexe et où $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes.

⊕ **Lemme d'Abel.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors

- i. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- ii. Pour tout $r \in]0, |z_0|[$, la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0, r)$.

Preuve. En effet, si M est un majorant de $|a_n||z_0|^n$ avec $|z_0| > 0$, nous avons, pour $|z| < |z_0|$:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

i. et ii. sont alors immédiats. □

⊕ **Définition du rayon de convergence et du disque de convergence.** Si $\sum_n a_n z^n$ est une série entière, le nombre

$$R = \sup \{ r \geq 0 \text{ la suite } (|a_n| r^n)_n \text{ est bornée} \}$$

s'appelle le *rayon de convergence* de $\sum_n a_n z^n$. On dit que $D(0, R)$ est le *disque de convergence*.

Il découle du lemme d'Abel que :

- pour tout $z \in D(0, R)$, $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.
- pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, la série diverge.
- pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Calcul pratique du rayon de convergence. Les techniques utilisées sont issues des règles de d'Alembert et de Cauchy pour établir la convergence de séries numériques.

⊕ **Règle de d'Alembert.** Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

⊕ **Règle de Cauchy.** Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

⊕ **Formule d'Hadamard.** Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$, et où

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Preuve. Règle de d'Alembert. L'existence de la limite λ implique qu'il existe un rang à partir duquel $(a_n)_n$ ne s'annule pas.

Si $\lambda = 0$, montrons que $R = +\infty$.

Il suffit de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée.

Ceci est clair si $z = 0$. Si maintenant $z \neq 0$, nous avons

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit qu'à partir d'un certain rang, $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \leq 1$, et donc qu'à partir d'un certain rang, la suite $(|a_n z^n|)_n$ est décroissante, ce qui entraîne qu'elle est bornée.

Si $\lambda = +\infty$, montrons de même que $R = 0$.

Il suffit de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée.

Or, nous avons

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On en déduit qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait, $\left| \frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \geq 2$, et donc que pour $n \geq N$,

$$|a_n z^n| \geq 2^{n-N} |a_N| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 1.1.

1. Montrez de même que, si $\lambda \in]0, +\infty[$, alors pour tout $r < 1/\lambda$ et pour tout $z \in \overline{D}(0, r)$ la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée et que pour tout $r > 1/\lambda$ et pour tout z tel que $|z| \geq r$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée. En déduire la preuve de la règle de d'Alembert pour les séries entières.
2. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum_n z^n/n!$, $\sum_n n^\alpha z^n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_n n! z^n$.
3. Montrez la règle de Cauchy pour les séries entières.
4. Montrez que si la règle de d'Alembert s'applique pour une série entière, alors celle de Cauchy s'applique aussi. Montrez que la réciproque est fausse (on pourra par exemple regarder la série $\sum_n a_n z^n$ avec $(a_n)_n$ définie par $a_n = \frac{1}{2}$ si n est pair et $a_n = 1$ si n est impair).
5. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert ou celle de Cauchy à la série entière $\sum_n z^{2^n}$?

Preuve de la règle d'Hadamard. Tout d'abord, on rappelle que

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} |a_k|^{1/k} \quad \text{par définition}$$

En particulier, si $\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ (petit exercice !) et on est ramené à la règle de Cauchy.

Si maintenant $\lambda = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$, alors

$$\forall A > 1, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \exists k \geq n \quad |a_k|^{1/k} \geq A.$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $A > \frac{1}{|z|}$. Il existe donc N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \exists k \geq n \quad |a_k|^{1/k} \geq A.$$

Nous avons alors :

$$\forall n \geq N, \quad \exists k \geq n \quad |a_k||z|^k = \left(|a_k|^{1/k}|z|\right)^k \geq (A|z|)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

ce qui montre que la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée, et donc que $R = 0 = 1/\lambda$.

Exercice 1.2.

1. Montrez de même que, si $\lambda \in]0, +\infty[$, alors pour tout $r < 1/\lambda$ et pour tout $z \in \overline{D}(0, r)$ la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée et que pour tout $r > 1/\lambda$ et pour tout z tel que $|z| \geq r$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée. En déduire la preuve de la règle d'Hadamard pour les séries entières.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n z^{2^n}$?

Remarque. La formule d'Hadamard permet de calculer le rayon de convergence de toutes les séries entières $\sum_n a_n z^n$ dont on connaît la suite $(a_n)_n$ des coefficients.

⊕ **Somme et produit de séries entières.** Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à $R > 0$ et $R' > 0$. Notons f et g les sommes de ces séries entières sur leur disque de convergence $D(0, R)$ et $D(0, R')$.

Somme. La série entière $\sum_n c_n z^n$ définie par $c_n = a_n + b_n$ est appelée *somme* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geq \inf(R, R')$. Sur $D(0, R'')$ $f + g$ est la somme de la série entière $\sum_n c_n z^n$.

Produit. La série entière $\sum_n d_n z^n$ définie par $d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est appelée *produit* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Son rayon de convergence R'' vérifie $R'' \geq \inf(R, R')$. Sur $D(0, R'')$ fg est la somme de la série entière $\sum_n d_n z^n$. Si

Preuve. En effet, $\sum (a_n + b_n)z^n$ converge pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \inf(R, R')$ vers $f(z) + g(z)$, d'où le résultat en ce qui concerne la somme.

En ce qui concerne le produit, montrons que, pour $|z| < \min(R, R')$, $\sum d_n z^n$ converge absolument. Si l'on pose $\varepsilon_n^k = 1$ si $k \in \{0, \dots, n\}$ et $\varepsilon_n^k = 0$ sinon, nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} |d_n| |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z|^k \varepsilon_n^k |b_{n-k}| |z|^{n-k}.$$

Le théorème de Tonelli permet d'échanger les sommes portant sur n et sur k (car les termes de la série double sont positifs). La dernière expression est donc égale à

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_k| |z|^k \varepsilon_n^k |b_{n-k}| |z|^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} |a_k| |z|^k |b_{n-k}| |z|^{n-k}.$$

Posant $\ell = n - k$ dans la dernière somme, nous obtenons que cette dernière expression est égale à

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} |a_k| |z|^k |b_{\ell}| |z|^{\ell} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z|^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |b_{\ell}| |z|^{\ell} \right) < +\infty.$$

Le théorème de Fubini nous permet alors d'écrire, pour $|z| < \min(R, R')$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \varepsilon_n^k b_{n-k} z^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k \varepsilon_n^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_k z^k b_{\ell} z^{\ell} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} z^{\ell} \right) = f(z)g(z). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. On ne peut rien dire de plus en général sur les rayons de convergence de la somme ou du produit de deux séries entières. Par exemple, les séries entières $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont leur rayon de convergence égal à 1 mais la somme a un rayon de convergence infini. De même, les séries entières $\sum z^n$ et $1 - z$ ont pour rayon de convergence 1 et $+\infty$, mais le produit des deux séries entières, qui est 1, a pour rayon de convergence $+\infty$. Par contre, on peut montrer (exercice !), que si $R \neq R'$, alors le rayon de convergence de la somme est exactement égal à $\min(R, R')$.

⊕ **Continuité de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si f est la somme de la série, alors f est continue sur le disque de convergence.

Preuve. En effet, pour tout $r \in]0, R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $|z| \leq r$, sa somme est donc continue sur $|z| \leq r$ car chaque somme partielle est continue, et ceci pour tout $r < R$, d'où le résultat. $\square$

2. Fonctions holomorphes ou $\mathbb{C}$ -dérivables.

⊕ **Fonctions holomorphes.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 lorsque

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On note alors $f'(z_0)$ cette limite.

- On dit que f est *holomorphe* sur U lorsque f est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point z_0 de U .

- On note $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de U dans $\mathbb{C}$.

⊕ **Proposition :** *l'ensemble $H(U)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert U muni de l'addition, de la multiplication et de sa structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est une algèbre. Autrement dit, toute combinaison linéaire finie de fonctions holomorphes est holomorphe et le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe.*

Preuve. Immédiate, laissée au lecteur. □

⊕ **La composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe.** *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$, $g \in H(V)$ telles que $f(U) \subset V$. Alors $g \circ f \in H(U)$ et*

$$\forall z \in U, \quad (g \circ f)'(z) = f'(z) \cdot (g' \circ f)(z).$$

Preuve. Immédiate, laissée au lecteur. □

⊕ **Les séries entières sont holomorphes.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la somme $f(z)$ de cette série définit une fonction holomorphe sur le disque de convergence $D(0, R)$. De plus, pour tout $z_0 \in D(0, R)$,*

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Preuve. Montrons tout d'abord que la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_n a_n z^n$.

Si $R = +\infty$, alors pour tout $r > 0$, la suite $(|a_n|r^n)_n$ est bornée. Notons M_r un majorant de cette suite. On en déduit que, si $r > 0$ et si $r' > r$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n|a_n|r^{n-1} \leq n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1} |a_n|r'^{n-1} \leq M_{r'} n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

(limite à vérifier en exercice !)

On en déduit que la suite $(n|a_n|r^{n-1})_n$ est bornée, et ce pour tout $r > 0$, ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} na_n z^{n-1}$ est égal à $+\infty$.

Supposons maintenant $R \in]0, +\infty[$. La même preuve que précédemment montre que, pour tout $r < R$, la suite $(n|a_n|r^{n-1})_n$ est bornée.

De plus, si $r > R$, il découle de la définition du rayon de convergence R qu'il existe $r' \in [R, r[$ tel que la suite $(|a_n|r'^n)_n$ ne soit pas bornée (sinon, la suite serait bornée pour tout $r' \in [R, r[$, et nous aurions $R \geq r$). En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n|a_n|r^{n-1} \geq n \left(\frac{r}{r'} \right)^{n-1} |a_n|r'^n$$

ce qui montre que la suite $(|a_n|r^n)_n$ n'est pas bornée.

Montrons maintenant que, si $z_0 \in D(0, R)$ la fonction f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 et

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}.$$

Soit $z \in D(0, R)$ tel que $z \neq z_0$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \end{aligned}$$

Si $|z| < r$ et $|z_0| < r$ avec $r < R$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z^k| |z_0|^{n-1-k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < +\infty.$$

On en déduit que, si z_0 est fixe avec $|z_0| < r < R$, alors la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$$

converge normalement sur $D(0, r)$. Comme

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ |z| < r}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$$

existe et vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z_0^{n-1},$$

on en déduit le théorème. $\square$

Par récurrence, on en déduit le résultat suivant :

$\oplus$ **Corollaire.** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme est $\mathbb{C}$ -dérivable à tous les ordres sur son disque de convergence, et elle est la somme de sa série de Taylor :

$$\forall z \in D(0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Nous étudions à partir de maintenant les conditions nécessaires et suffisantes sur les dérivées d'ordre 1 d'une fonction pour qu'elle soit holomorphe.

⊕ **Conditions de Cauchy-Riemann.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. f est holomorphe sur U si et seulement si f est différentiable sur U et, pour tout $z \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$$

où $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ désigne l'opérateur $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

Preuve. En effet, si f est holomorphe, alors pour tout $z_0 \in U$,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Nous avons donc, quand $z \rightarrow z_0$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

ce qui montre que f est différentiable en z_0 et pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

$$d_{z_0} f(h, k) = f'(z_0)(h + ik).$$

Comme

$$d_{z_0} f(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)k,$$

on en déduit, en faisant $k = 0$ et $h \neq 0$, puis $h = 0$ et $k \neq 0$, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i f'(z_0),$$

donc que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Réciproquement, supposons f différentiable en z_0 et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, et montrons que f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 . Nous avons

$$d_{z_0}f(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)k.$$

Si nous posons $\zeta = h + ik$ alors $h = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})$ et $k = \frac{1}{2i}(\zeta - \bar{\zeta})$, donc

$$\begin{aligned} d_{z_0}f(h, k) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(\zeta + \bar{\zeta}) - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(\zeta - \bar{\zeta}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\zeta + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) \quad \text{et} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right). \end{aligned}$$

L'hypothèse $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ nous donne alors

$$d_{z_0}f(h, k) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(h + ik)$$

donc

$$f(z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

quand $z \rightarrow z_0$, ce qui montre que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. □

⊕ **Corollaire.** *Pour toute fonction différentiable f d'un ouvert U dans $\mathbb{C}$ et pour tout $z_0 \in U$, nous avons*

$$d_{z_0}f(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)k.$$

Si on pose $w = h + ik$, ceci se réécrit

$$d_{z_0}f(h, k) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)w + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\bar{w}$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right).$$

En particulier, f est holomorphe si et seulement si f est différentiable sur U et sa différentielle est $\mathbb{C}$ -linéaire en tout point de U .

Dans ce cas, pour tout $z \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Enfin, si $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, l'équation $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ dans U s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \end{cases}$$

⊕ **Les fonctions holomorphes sont harmoniques.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors f , $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont harmoniques. De plus pour toute fonction g de classe $C^2(U)$ et à valeurs complexes, nous avons

$$\Delta g = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{z} \partial z}$$

En fait, nous verrons plus loin que les fonctions holomorphes sont de classe C^∞ . Le corollaire précédent est alors immédiat.

Exercice 2.1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Montrez que sur U :

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \quad \text{et} \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

Exercice 2.2. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications différentiables. Montrez que

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z)) \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z)$$

et

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial g}{\partial w}(f(z)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z)$$

Montrez que si f et g sont holomorphes, alors $g \circ f$ est holomorphe et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

Exercice 2.3. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $\varphi : U \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une application différentiable. On suppose que pour tout $u \in U$, l'application $V \ni v \mapsto \varphi(u, v)$ est holomorphe et que pour tout $v \in V$, l'application $U \ni u \mapsto \varphi(u, v)$ est holomorphe. On suppose maintenant que pour tout $z \in U$, $\bar{z} \in V$ et on pose, pour

$z \in U$, $f(z) = \varphi(z, \bar{z})$. Montrer que f est différentiable sur U et que pour tout $z \in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(z, \bar{z}), \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(z, \bar{z}).$$

Application : calculer $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$ pour :

$$f(z) = z, \quad f(z) = \bar{z}, \quad f(z) = z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

$$f(z) = |z|^2, \quad f(z) = e^{|z|^2}, \quad f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2 + 1}.$$

⊕ **Primitives.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, une *primitive* de f est une fonction $F \in H(U)$ telle que $F' = f$.

⊕ **Primitives des séries entières.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f la somme de cette série. Alors f admet une primitive F . De plus les primitives F sont de la forme

$$\forall z \in D(0, R), \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + C$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante quelconque.

Preuve. Il découle du théorème d'holomorphie des séries entières que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$. Donc la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R . Notons F la somme de cette série entière.

Le théorème d'holomorphie des séries entières montre aussi que F est holomorphe et que, pour tout $z \in D(0, R)$, $F'(z) = f(z)$.

Il reste à vérifier que si F_1 et F_2 sont deux fonctions holomorphes telles que $F_1' = F_2'$, alors F_1 et F_2 diffèrent d'une constante.

Il découle de ce qui précède que $G = F_1 - F_2$ est holomorphe (comme différence de deux fonctions holomorphes), et que $G' = 0$, donc $dG \equiv 0$ sur $D(0, R)$. Comme $D(0, R)$ est connexe, on en déduit que G est constante. (cf. Rappel ci-après) $\square$

$\oplus$ **Rappel de calcul différentiel.** Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable sur U telle que $df \equiv 0$. Alors f est constante sur U .

Preuve. Soit $z_0 \in U$ Posons $A = \{z \in U, f(z) = f(z_0)\}$.

A est non vide car il contient z_0 . Il est fermé car f est continue.

Montrons que A est ouvert. Soit $z \in A$ et $r > 0$ tel que la boule $B(z, r)$ de centre z et de rayon r soit incluse dans U . Si $w \in B(z, r)$, alors le segment $[z, w] = \{(1 - t)z + tw, t \in [0, 1]\}$ est inclus dans U et d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\|f(w) - f(z)\| \leq \left(\sup_{[z, w]} \|df\| \right) \|z - w\| = 0$$

car $df \equiv 0$. Ceci montre que $B(z, r) \subset A$, donc que A est ouvert.

A est donc non vide, ouvert et fermé dans U qui est connexe. Ceci entraîne que $A = U$, donc que f est constante. $\square$

3. Fonction exponentielle complexe.

Référence : Rudin, Analyse Réelle et Complexe.

⊕ **Fonction exponentielle complexe.** La série entière $\sum_n z^n/n!$ ayant pour rayon de convergence $R = +\infty$, on définit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Nous avons :

$$\forall w, z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w.$$

Preuve. En effet, si $z, w \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{k!} C_k^{\ell} z^{\ell} w^{k-\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} z^{\ell} w^{k-\ell}. \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} |z|^{\ell} |w|^{k-\ell} = \exp(|z| + |w|) < +\infty.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini et obtenir que

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} z^{\ell} w^{k-\ell} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{\ell!(k-\ell)!} z^{\ell} w^{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!k!} z^{\ell} w^k \\ &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \exp z \cdot \exp w. \quad \square \end{aligned}$$

⊕ **Théorème.**

- (a) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp z \neq 0$.
 (b) $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp' = \exp$.
 (c) la restriction de la fonction exponentielle à l'axe réel est une fonction positive croissante et

$$\lim_{+\infty} \exp = +\infty, \quad \lim_{-\infty} \exp = 0$$

- (d) Il existe un nombre positif π tel que $\exp z = 1$ si et seulement si $z/2\pi i$ est un entier relatif.
 (e) la fonction exponentielle est périodique, de période $2\pi i$.
 (f) L'application $t \mapsto \exp(it)$ est une surjection de l'axe réel sur le cercle unité.
 (g) Notons $\cos t = \operatorname{Re}(\exp it)$ et $\sin t = \operatorname{Im}(\exp it)$.

Nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On en déduit que $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$, et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

(h) pour tout nombre complexe $w \neq 0$, il existe un nombre complexe z tel que $\exp z = w$.

(i) $\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$

Preuve.

(a) En effet, si $z \in \mathbb{C}$, $\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp 0 = 1$, ce qui montre que $\exp z \neq 0$.

(b) est évident.

(c) est évident aussi car, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\exp x \geq 1 + x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{et } \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

(d) $\exp$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Donc $\ker \exp$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, qui est fermé car $\exp$ est continue. On en déduit qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $\ker \exp = \alpha\mathbb{Z}$ et on pose $\pi = \alpha/2$.

(e) est évident.

(f) et (g) Pour tout réel t , on a

$$|\exp(it)|^2 = \exp(it) \cdot \overline{\exp(it)}.$$

Or

$$\begin{aligned} \overline{\exp(it)} &= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{it})^n}{n!} \quad (\text{grâce à la continuité de l'application } z \mapsto \bar{z}) \\ &= \exp(-it), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |\exp(it)|^2 &= \exp(it) \cdot \overline{\exp(it)} = \\ &= \exp(it) \cdot \exp(-it) = \exp(it - it) = \exp 0 = 1. \end{aligned}$$

Notons $\cos t = \operatorname{Re}(\exp it)$ et $\sin t = \operatorname{Im}(\exp it)$.

Nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On en déduit que $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

De $|\exp(it)| = 1$, on déduit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

De $\ker \exp = 2\pi\mathbb{Z}$, on déduit que $\exp(\pi i)$ est une racine carrée de 1 différente de 1, donc $\exp(\pi i) = -1$.

Au voisinage de 0, $\sin t \sim t$ montre que $\sin$ est croissante sur un intervalle de la forme $[0, \beta]$, donc strictement positive sur un intervalle de la forme $]0, \beta[$.

Notons γ le plus petit réel positif tel que $\sin \gamma = 0$. Comme $\exp(\pi i) = -1$, ce qui donne que $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, nous avons donc $\gamma \leq \pi$.

De $\exp(\pi i) = -1$, nous déduisons que $\exp(\frac{\pi}{2}i) = i$ ou $-i$. Si $\exp(\frac{\pi}{2}i) = -i$, alors $\sin \frac{\pi}{2} = -1$, ce qui entraîne que $\sin$ s'annule entre 0 et $\pi/2$, donc que $0 < \gamma < \frac{\pi}{2} < \pi$. On a alors $\exp(i\gamma) = \pm 1$, ce qui entraîne que $\exp(2i\gamma) = 1$, donc que $2\gamma \in 2\pi\mathbb{Z}$ avec $0 < 2\gamma < 2\pi$. C'est absurde. Donc

$$\exp i\frac{\pi}{2} = i.$$

Nous obtenons de plus que $\gamma = \pi$, donc que $\sin$ est positive sur $[0, \pi]$.

Notons $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Il reste à vérifier que l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it) \in \mathbb{T}$ est bien une surjection. Soit donc $w = u + iv \in \mathbb{T}$ avec u, v réels.

Supposons tout d'abord $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Puisque $0 \leq u \leq 1$, et que $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, il existe $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $u = \cos t$. Comme $0 \leq v = \sqrt{1 - u^2}$ et que $\sin$ est positive sur $[0, \pi]$, nous avons alors $v = \sin u$, donc $w = \exp(iu)$.

Si $u < 0$ et $v \geq 0$, les conditions précédentes sont satisfaites par $-iw$. Donc il existe un réel t tel que $\exp(it) = -iw$, et $w = \exp(i(t + \frac{\pi}{2}))$.

Enfin, si $v < 0$, les deux cas précédents montrent que $-w = \exp it$ pour un t réel, d'où $w = e^{i(t+\pi)}$, ce qui achève la démonstration de (f).

(h) Si w est un nombre complexe, la fonction $\exp$ étant surjective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp x = |w|$. De plus, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(iy) = w/|w|$. On en déduit que $\exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp(iy) = w$.

(i) La fonction $\varphi :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni t \mapsto \frac{\sin t}{\cos t} \in] - \infty, \infty[$ est strictement croissante, définie, dérivable, et bijective de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. De $\varphi' = 1 + \varphi^2$, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi^2(t)} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi. \quad \square$$

⊕ **Définition.** Pour $z \in \mathbb{C}$, nous notons aussi e^z le nombre $\exp z$.

4. Arguments, Logarithmes, Racines carrées, Puissances.

⊕ **Définition.** Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
 On appelle *logarithme* de z tout nombre complexe w tel que $\exp w = z$.
 On appelle *argument* de z tout nombre réel t tel que $\exp(it) = \frac{z}{|z|}$.
 On appelle *racine carrée* de z tout nombre complexe w tel que $w^2 = z$.
 Si $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle *puissance α de z* tout nombre complexe de la forme $\exp(\alpha w)$ où w est un logarithme de z .

⊕ **Définition.** Soit X une partie de $\mathbb{C}^*$.

On appelle *détermination continue du logarithme sur X* toute application continue $L : X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in X, \quad \exp(L(z)) = z.$$

On appelle *détermination continue de l'argument sur X* toute application continue $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall z \in X, \quad \exp(iA(z)) = \frac{z}{|z|}.$$

On appelle *détermination continue de la racine carrée sur X* toute application continue $R : X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in X, \quad (R(z))^2 = z.$$

En particulier, une fonction L est une détermination continue du logarithme si et seulement si, pour tout $z \in X$, $L(z) = \ln|z| + iA(z)$ où A est une détermination continue de l'argument.

⊕ **Théorème.** Il n'existe pas de détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C}^*$. Il en est de même pour ce qui est des déterminations continues du logarithme et de la racine carrée.

Preuve. En effet, si A est une telle détermination de l'argument, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(it) = \exp(iA(\exp(it)))$, donc $t - A(\exp(it)) \in 2\pi\mathbb{Z}$. La fonction $a : \mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{t - A(\exp(it))}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ serait continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante. Mais $-\frac{A(1)}{2\pi} = a(0) = a(2\pi) = \frac{2\pi - A(1)}{2\pi}$ est faux.

S'il existait une détermination continue du logarithme L , alors A définie pour $z \in \mathbb{C}^*$ par $A(z) = -i(L(z) - \ln|z|)$ serait une détermination continue de l'argument, ce qui est absurde.

S'il existait une détermination continue R de la racine carrée sur $\mathbb{C}^*$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $(R(z))^2 = z$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(R(\exp(it)))^2 = \exp(it)$, ce qui nous donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{R(\exp(it))}{\exp(it/2)} \right)^2 = 1.$$

La fonction $S : \mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{R(\exp(it))}{\exp(it/2)}$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\{-1, 1\}$. Elle est donc constante. Notons $C = \pm 1$ la valeur prise par cette fonction. On a alors

$$0 \neq C = S(\pi) = \frac{R(-1)}{i} = S(-\pi) = \frac{R(-1)}{-i} = -C,$$

ce qui est absurde. □

⊕ **Théorème et Définition.** On appelle *détermination principale de l'argument* et on note la note Arg la détermination continue de l'argument $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow]-\pi, \pi[$ qui à un élément z de $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow]-\pi, \pi[$ associe l'unique argument de z dans $] - \pi, \pi[$.

On appelle *détermination principale du logarithme* et on note cette application Ln l'application définie par $\text{Ln} : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto \ln |z| + i \text{Arg } z$.

On appelle *détermination principale de la racine carrée* l'application $R : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto \exp(\frac{1}{2} \text{Ln } z)$.

Enfin, si $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle *détermination principale de la puissance α* l'application $P_\alpha : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto \exp(\alpha \text{Ln } z)$.

Les déterminations principales du logarithme, de la racine carrée, et de la puissance α sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, $\text{Ln}' z = \frac{1}{z}$.

Preuve. L'application $\varphi : t \in]-\pi, \pi[\rightarrow \exp(it) \in \mathbb{T} \setminus \{-1\}$ est bijective, continue. Montrons que sa bijection réciproque ψ est aussi continue : il faut donc montrer que si w_n est une suite dans $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$ qui converge vers $w \in \mathbb{T} \setminus \{-1\}$, alors la suite $(t_n)_n = (\psi(w_n))_n$ est une suite qui converge vers $t \in]-\pi, \pi[$ tel que $t = \psi(w)$.

Il suffit de montrer que, pour toute sous-suite convergente de (t_n) vers un $t \in [-\pi, \pi]$, on a $t \in]-\pi, \pi[$ et $\psi(w) = t$. Considérons donc une sous-suite convergente de (t_n) vers un $t \in [-\pi, \pi]$. Si $t = \pi$ ou $t = -\pi$, le fait que φ se prolonge par continuité aux bornes de l'intervalle $] - \pi, \pi[$ nous donne $w = -1$, ce qui est exclu. Nous avons donc $t \in]-\pi, \pi[$, et la continuité de φ nous donne alors $t = \psi(w)$.

On définit alors Arg sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ par

$$\text{Arg}(z) = \psi\left(\frac{z}{|z|}\right)$$

et Ln par

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z).$$

Nous avons alors sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, $\exp \circ \text{Ln} = \text{Id}$. On en déduit que, quand $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et $w \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup \{z\})$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(\exp \circ \text{Ln})(w) - (\exp \circ \text{Ln})(z)}{w - z} = \\ &= \frac{(\exp \circ \text{Ln})(w) - (\exp \circ \text{Ln})(z)}{\text{Ln}(w) - \text{Ln}(z)} \frac{\text{Ln}(w) - \text{Ln}(z)}{w - z}. \end{aligned}$$

Faisant tendre w vers z , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{(\exp \circ \text{Ln})(w) - (\exp \circ \text{Ln})(z)}{\text{Ln}(w) - \text{Ln}(z)} &\xrightarrow{w \rightarrow z} \exp'(\text{Ln}(z)) = \\ &= \exp(\text{Ln}(z)) = z \end{aligned}$$

(ceci découle de la dérivabilité de $\exp$, de la continuité de Ln , et de l'injectivité de Ln qui découle de $\exp \circ \text{Ln} = \text{Id}$). En particulier

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{\text{Ln } w - \text{Ln } z}{w - z} = \frac{1}{z}. \quad \square$$

⊕ **Théorème.** Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ sur lequel il existe une représentation continue L_0 du logarithme. Alors toute autre détermination continue L sur U est de la forme $L = L_0 + 2\pi ki$ où k est une constante dans $\mathbb{Z}$.
 De plus, L est holomorphe, et pour tout $z \in U$, $L'(z) = \frac{1}{z}$.
 Réciproquement, si F est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ (c'est-à-dire si F est holomorphe et si $F'(z) = 1/z$), alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $F + c$ soit une détermination continue du logarithme.

Preuve. Le premier point est clair. La preuve du second point est analogue à la preuve du théorème précédent. Pour le troisième, on remarque que si $F'(z) = 1/z$ et si $G(z) = z \exp(-F(z))$, alors

$$\forall z \in U, \quad G'(z) = \exp(-F(z)) - zF'(z) \exp(-F(z)) = 0,$$

donc G une constante non nulle $b = e^c$. $F + c$ est alors une détermination continue du logarithme sur Ω .

⊕ **Corollaire.** Pour tout $\alpha \in [-\pi, \pi[$, on peut refaire la construction précédente d'une détermination continue du logarithme, d'un argument, etc... sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]e^{i\alpha})$. On aura des résultats analogues. On peut donc construire des représentations continues de logarithme, d'argument, etc... sur n'importe quel ensemble de la forme $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite fermée issue de l'origine.

⊕ **Théorème.**

$$\forall z \in D(0, 1), \quad \text{Ln}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Preuve. En effet, la série entière de droite est convergente sur $D(0, 1)$ et définit une fonction $L : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ qui est holomorphe

et telle que

$$\forall z \in D(0, 1), \quad L'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} = \text{Ln}'(1+z).$$

Le disque étant connexe, $z \mapsto L(1+z) - \text{Ln}(1+z)$ est constante. Or elle est nulle à l'origine car $\text{Ln}(1) = 0$. $\square$

5. L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

$\oplus$ **Définition d'un chemin.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle *chemin dans U* toute application continue et C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ où $a < b$.

On rappelle que cela veut dire qu'il existe une subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[0, 1]$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $[t_{i-1}, t_i]$. Nous dirons que γ est un *chemin fermé* si et seulement si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Nous notons $\gamma^* = \gamma([a, b])$ et nous disons que γ^* est le *support* de γ .

$\oplus$ **Définition de l'intégrale de Cauchy d'une fonction continue sur un chemin.** Avec les notations précédentes, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, on note

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Bien entendu, si δ est une autre paramétrisation du même chemin, c'est-à-dire si $\delta : [a', b'] \rightarrow U$ est telle qu'il existe une application strictement croissant $\varphi : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 et telle que φ^{-1} soit aussi de classe C^1 , et telle que $\delta = \gamma \circ \varphi$, alors

27 L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\delta} f(z)dz.$$

Bien faire attention au fait que l'intégrale d'une fonction continue sur un chemin ne dépend pas uniquement du support γ^* mais dépend aussi du sens de parcours. En effet, si par exemple $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin et si $\gamma^- := \gamma(1 - t)$ est le même chemin parcouru dans l'autre sens, alors si f est continue au voisinage de γ^* , nous avons

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Enfin, sous les mêmes hypothèses que précédemment, nous avons

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \left(\sup_{\gamma^*} |f| \right) \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \left(\sup_{\gamma^*} |f| \right) L(\gamma)$$

où $L(\gamma)$ désigne la longueur du chemin γ .

Cas particuliers. (a) Si $a \in U$ et $r > 0$ sont tels que $\overline{D}(a, r) \subset U$, le chemin

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto a + re^{it} \subset U$$

est appelé *le cercle orienté positivement de centre a et de rayon r* . On le note $\partial D(a, r)$. On a

$$\int_{\partial D(a, r)} f(z)dz = i \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})re^{i\theta}d\theta$$

$$\text{et } L(\partial D(a, r)) = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r.$$

(b) Soient a, b deux points de U . On appelle *segment $[a, b]$* le chemin

$$\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto a(1 - t) + bt$$

Si $\gamma^* \subset U$, on dit que le segment $[a, b]$ est inclus dans U et on écrit $[a, b] \subset U$, et on a

$$\int_{[a,b]} f(z)dz = \int_0^1 f(a(1-t) + bt)(b-a)dt$$

et

$$L([a, b]) = \int_0^1 |b-a|dt = |b-a|.$$

Le chemin opposé à $[a, b]$ est le chemin $[b, a]$, et on a

$$\int_{[a,b]} f(z)dz = - \int_{[b,a]} f(z)dz.$$

(c) Soient a, b, c trois nombres complexes. Soit $\Delta = \Delta(a, b, c)$ le triangle de sommets a, b et c , c'est-à-dire que Δ est l'enveloppe convexe des trois points a, b et c . On note $[a, b, c]$ le bord $\partial\Delta$ de ce triangle et on pose

$$\int_{[a,b,c]} f(z)dz = \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[c,a]} f(z)dz$$

pour toute fonction f continue sur la frontière de Δ . Nous pouvons considérer l'égalité précédente comme la définition du membre de gauche. Ou bien encore, nous pouvons considérer $\partial\Delta$ comme un chemin obtenu en joignant a à b , b à c et c à a par des segments.

Si on effectue une permutation circulaire, sur (a, b, c) , la relation précédente montre que le membre de gauche n'est pas affecté. Si (a, b, c) est remplacé par (a, c, b) , le membre de gauche change alors de signe :

$$\begin{aligned} \int_{[a,c,b]} f(z)dz &= \int_{[a,c]} f(z)dz + \int_{[c,b]} f(z)dz + \int_{[b,a]} f(z)dz = \\ &= - \int_{[a,b,c]} f(z)dz. \end{aligned}$$

29 L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

Le théorème suivant joue un rôle très important dans la théorie des fonctions holomorphes :

⊕ **Indice d'un chemin fermé par rapport à un point.** Soit γ un chemin fermé, U le complémentaire de γ^* dans le plan. On définit, pour $z \in U$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

et on appelle ce nombre l'indice de γ par rapport à z . Alors Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur U qui est constante sur chaque composante connexe de U et qui est nulle sur la composante connexe non bornée de U .

Remarquer que γ^* est compact, et est donc contenu dans un disque borné D dont le complémentaire $\mathbb{C} \setminus D$ est connexe. Par suite, $\mathbb{C} \setminus D$ est inclus dans l'une des composantes connexes de Ω . Ceci montre que Ω a exactement une seule composante connexe non bornée.

Preuve du théorème. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Fixons $z \in U$. On a

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - z}$$

Il suffit de montrer que, si $t \in [a, b]$ et si on pose

$$\varphi(t) = \exp \left(\int_a^t \frac{\gamma'(s) ds}{\gamma(s) - z} \right),$$

alors $\varphi(b)=1$.

La différentiation de cette égalité nous donne (excepté sur l'ensemble fini S où γ n'est pas dérivable

$$\forall t \in [a, b], \quad \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

En particulier, pour tout $t \in [a, b] \setminus S$,

$$\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} \right)' = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0.$$

On en déduit que $\frac{\varphi}{\gamma - z}$ est une fonction continue sur $[a, b]$ de dérivée nulle hormis en un nombre fini de points, donc que $\frac{\varphi}{\gamma - z}$ est constante sur $[a, b]$. Donc $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$, ce qui implique que pour tout $z \in U$,

$$\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}.$$

Le théorème de continuité sous le signe somme dans le cas des intégrales sur les intervalles compacts montre que $U \ni z \mapsto \text{Ind}_\gamma(z)$ est continue. En particulier, Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de U .

Enfin, le théorème de la convergence dominée montre que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \text{Ind}_\gamma(z) = 0.$$

On en déduit que $\text{Ind}_\gamma(z)$ est nul sur la composante connexe non bornée de U . $\square$

$\oplus$ **Remarque importante.** Si on se fixe un point z dans U , $\text{Ind}_\gamma(z)$ correspond au "nombre de tours" fait par γ autour du point z , comptés positivement si le sens de parcours est direct, et négativement autrement.

Pour comprendre cette interprétation, plaçons nous dans un cas particulier : supposons que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ soit C^1 et que 0 n'appartienne pas à γ^* . Nous allons interpréter géométriquement l'indice de γ par rapport à 0. Si on note Arg la détermination principale de l'argument dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, et nous supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $t_1 < \dots < t_N$ dans $[a, b]$ tels

31 L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

que $\gamma(t_j) \in]-\infty, 0[$ pour $j = 1, \dots, N$. Nous avons alors pour tout $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_N\}$

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i(\text{Arg} \circ \gamma)(t)} = r(t)e^{i\varphi(t)}$$

où r et φ sont C^1 sur $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$. Sur cet ensemble, nous avons

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t).$$

donc

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \left(\int_a^{t_1} + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_N}^b \right) \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t) \right) dt.$$

Par continuité de $\ln r$, les intégrales de r'/r disparaissent car $\ln r(a) = \ln r(b)$ (le chemin est fermé). Enfin

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_a^{t_1} + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_N}^b \right) (i\varphi'(t)) dt$$

donne le nombre de fois où γ traverse la demi-droite $] -\infty, 0]$, positivement dans le sens direct, c'est-à-dire de haut en bas, et négativement dans l'autre sens.

Exercice 5.1. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Pour $z \notin \partial D(a, r)$, calculer $\text{Ind}_{\partial D(a, r)}(z)$ le bord du disque étant parcouru dans le sens positif. De même pour le bord d'un triangle $[a, b, c]$ parcouru dans le sens direct.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème de Cauchy. Pour toute fonction holomorphe f dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que f' soit continue sur U et pour tous z, w dans U , si γ est un chemin joignant w à z (c'est-à-dire que $\gamma(a) = w$ et $\gamma(b) = z$), nous avons

$$f(z) - f(w) = \int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta.$$

Si γ est un chemin fermé (c'est-à-dire si $w = z$), nous avons

$$\int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta = 0.$$

Preuve. En effet, si $G(t) = f(\gamma(t))$, alors G est C^1 par morceaux, et pour tout $t \in [a, b] \setminus \{a, t_1, \dots, t_n\}$, $G'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} F(z) - F(w) &= G(a) - G(b) = \int_a^b G'(t) dt = \\ &= \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f'(\zeta) d\zeta. \quad \square \end{aligned}$$

Exercice 5.2. Soit γ un chemin fermé. Calculer, pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\int_{\gamma} z^n dz.$$

Si maintenant $0 \notin \gamma^*$, calculer, pour $n = -2, -3, -4, \dots$

$$\int_{\gamma} z^n dz.$$

Que vaut l'intégrale précédente si $n = -1$?

33 L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

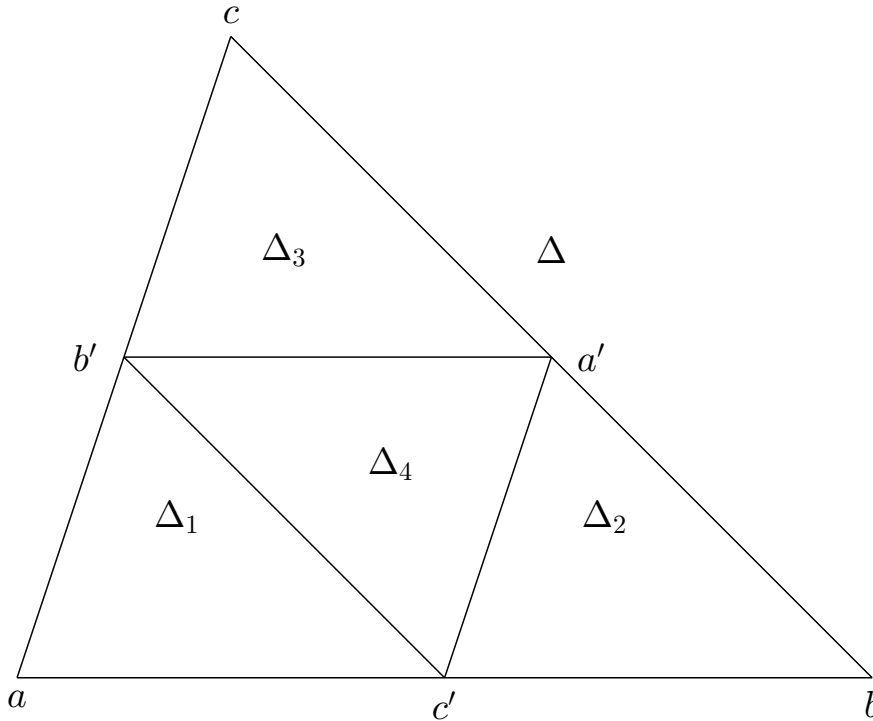
Théorème de Goursat. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a, b, c \in U$ tel que le triangle Δ de sommets a, b et c soit inclus dans U . Soit $p \in U$, $f \in H(U \setminus \{p\})$ qui est continue sur U . On a

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[a,b,c]} f(z)dz = 0.$$

Preuve. Supposons tout d'abord que $p \notin \Delta$. Notons L_0 le périmètre de ce triangle et D_0 son diamètre, c'est-à-dire

$$D_0 = \sup_{(z,w) \in \Delta(a,b,c)} |z - w|.$$

Soient a', b', c' les milieux respectifs de $[b, c]$, $[a, c]$ et $[a, b]$. Considérons les quatre triangles $[a, c', b']$, $[b, a', c']$, $[c, b', a']$ et $[a', b', c']$ et notons les $\partial\Delta_j$ pour $j = 1, 2, 3, 4$.



Si $J = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[a,b,c]} f(z)dz$, nous avons

$$J = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz$$

La valeur absolue d'une des intégrales du membre de droite de l'égalité précédente est donc au moins égale à $|J|/4$. Appelons Δ_1 le triangle correspondant. Le périmètre de ce triangle est $L_1 = L_0/2$ et son diamètre $D_1 = D_0/2$.

Répetons la procédure avec Δ_1 au lieu de Δ , et ainsi de suite. On engendre ainsi une suite $(\Delta_n)_n$ de triangles emboîtés. Le périmètre de $\partial\Delta_n$ est $L_n = 2^{-n}L_0$ et le diamètre de Δ_n est $D_n = 2^{-n}D_0$. En outre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4^{-n}|J| \leq \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right|$$

D'après le théorème des compacts emboîtés, l'intersection des Δ_n est un singleton $\{z_0\}$. Nous avons $z_0 \in \Delta$ et f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 (car $p \notin \Delta$).

Si $\varepsilon > 0$, il existe un $r > 0$ tel que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$$

dès que $|z - z_0| \leq r$.

De plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|z - z_0| \leq D_n \leq r$ pour tout $z \in \Delta_n$.

Comme 1 et z ont z et $z^2/2$ comme primitives dans $\mathbb{C}$, il découle du théorème de Cauchy vu précédemment que

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz = 0.$$

Nous avons alors

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz,$$

35 L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

donc

$$4^{-n}|J| \leq \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \leq \varepsilon L_n D_n = \varepsilon 4^{-n} L_0 D_0$$

et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|J| \leq \varepsilon L_0 D_0$. Faisant tendre ε vers 0, nous obtenons $J = 0$ si $p \notin \Delta$.

Supposons maintenant que p soit un sommet de Δ , par exemple a . Si a, b, c sont alignés, il est clair que

$$\int_{[a,b,c]} f(z)dz = 0.$$

Sinon, choisissons des points $x \in [a, b]$ et $y \in [a, c]$ tous les deux voisins de a , et observons que l'intégrale de f sur $\partial\Delta$ est la somme des intégrales sur les frontières des triangles $\Delta(a, x, y)$, $\Delta(x, b, y)$ et $\Delta(b, c, y)$. Les deux dernières intégrales sont nulles d'après ce qui précède. Par suite, l'intégrale sur $\partial\Delta$ est la somme des intégrales sur $[a, x]$, $[x, y]$ et $[y, a]$, et comme ces intervalles peuvent être rendus arbitrairement petits et que f est bornée sur Δ , nous obtenons de nouveau que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Finalement, si p est un point arbitraire de Δ , on utilise le résultat précédent pour $\Delta(a, b, p)$, $\Delta(b, c, p)$, $\Delta(c, a, p)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

$\oplus$ **Ouvert étoilé.** Soit U un ouvert et $z_0 \in U$. On dit que U est *étoilé par rapport à z_0* si et seulement si pour tout $z \in U$, le segment $[z_0, z] = \{(1-t)z_0 + tz, t \in [0, 1]\}$ est inclus dans U .

$\oplus$ **Existence de primitives des fonctions holomorphes dans un ouvert étoilé.** Soit U un ouvert étoilé, $p \in U$ et f une fonction holomorphe dans $U \setminus \{p\}$, continue dans U . Alors f admet une primitive dans U .

Preuve. Pour $z \in U$, posons $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w)dw$. F est définie dans U tout entier.

Si $z \in U$, alors pour h suffisamment petit, le segment $[z, z + h]$ est dans U . L'ouvert U étant étoilé par rapport à z_0 , pour tout $w \in [z, z + h]$ les segments $[z_0, w]$ sont dans U , ce qui implique que le triangle $\Delta(z_0, z, z + h)$ est dans U . D'après le théorème de Goursat, nous avons

$$\int_{[z_0, z, z+h]} f(w)dw = 0,$$

donc

$$F(z) + \int_{[z, z+h]} f(w)dw - F(z + h) = 0,$$

soit encore

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w)dw.$$

f étant continue au point z , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $w \in U$, $|w - z| \leq r$ implique $|f(w) - f(z)| \leq \varepsilon$. Pour $h \neq 0$ et $|h| \leq r$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} (f(w) - f(z))dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que F est une primitive de f dans U . Le théorème de Cauchy nous donne donc, sur un chemin fermé γ :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} F'(z)dz = 0.$$

⊕ **Théorème de Cauchy dans un ouvert étoilé.** Soit U un ouvert étoilé, $p \in U$, $f \in H(U \setminus \{p\})$, continue sur U , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

pour tout chemin fermé dans U .

Preuve. En effet, f admet une primitive F , et d'après le théorème de Cauchy, si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est un chemin fermé

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

car $\gamma(a) = \gamma(b)$. □

⊕ **Formule de Cauchy dans un ouvert étoilé.** Soit U un ouvert étoilé, et γ un chemin fermé dans U . Soit $f \in H(U)$. Si $z \in U$, et $z \notin \gamma^*$, on a

$$f(z) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Preuve. En effet, si z est fixé et si on pose

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \in U, \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{si } \zeta = z, \end{cases}$$

g est continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. On en déduit que

$$\int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0,$$

ce qui nous donne la formule énoncée. $\square$

$\oplus$ **Définition des fonctions analytiques.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On dit que f est *analytique* sur U si et seulement si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un voisinage U_{z_0} de z_0 inclus dans U tel que, dans ce voisinage, il existe une série entière $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ qui converge dans U_{z_0} et telle que f soit la somme de cette série entière.

Grâce au fait que toute série entière soit holomorphe sur son disque de convergence, on en déduit que toute fonction analytique est holomorphe. Nous allons maintenant voir que la formule de Cauchy nous donne la réciproque.

$\oplus$ **Toute fonction holomorphe est analytique.** Soit U un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors U est analytique dans U . De plus, si $z_0 \in U$, alors f est développable en série entière dans le disque $D(z_0, r)$ où $r = d(z_0, \partial U)$.

Preuve. En effet, si $z_0 \in U$ et si $r < d(z_0, \partial U)$, alors $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Si on note $\gamma = \partial D(z_0, r) \subset U$ orienté positivement,

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ &= \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{d\zeta}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} \\ &= \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right) d\zeta. \end{aligned}$$

39 L'Intégrale de Cauchy et l'analyticité des fonctions holomorphes.

Pour z et z_0 fixés, la série de fonctions $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$ converge uniformément sur $\partial D(z_0, r)$ car pour $\zeta \in \partial D(z_0, r)$, nous avons $|\zeta - z_0| = r > 0$ et $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{r} < 1$. On en déduit que

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

et que cette série est convergente dans $D(z_0, r)$. $\square$

⊕ **Corollaire.** Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et si $f \in H(U)$, alors $f' \in H(U)$.

⊕ **Corollaire.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(U)$. Alors, pour tout $z_0 \in U$, si $r = d(z_0, \partial U)$, la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge sur $D(z_0, r)$ (autrement dit, le rayon de convergence de $\sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n$ est au moins égal à $d(z_0, \partial U)$), et

$$f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{sur } D(z_0, r).$$

De plus, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

6. Propriétés des fonctions holomorphes.

Nous commençons par rappeler les définitions et propriétés des points isolés et d'accumulation d'un ensemble.

⊕ **Rappel.** Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E . Les boules ouvertes de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ sont notées $B(x, \varepsilon)$.
Un point $a \in A$ est dit isolé dans A si et seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}.$$

Un point x de E est un point d'accumulation de A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\}.$$

En particulier, un point x de E est un point d'accumulation de A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ contient une infinité de points de A .

x est un point d'accumulation de A si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. L'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble quelconque est fermé.

Si A est quelconque, $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points d'accumulation et des points isolés de A .

Preuve. Il est clair que si, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ contient une infinité de points de A , alors $\emptyset \neq B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\}$.

Réciproquement, s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon)$ contienne un nombre fini de points de A , alors $\inf_{a \in A \cap B(x, \varepsilon)} d(a, x) = r > 0$ et $B(x, r) \cap A = \emptyset$ si $x \notin A$ ou bien $B(x, r) \cap A = \{x\}$ si $x \in A$. C'est absurde.

x est un point d'accumulation de A si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ contient un point de A différent de x , donc si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Montrons que l'ensemble des points d'accumulation A' de A est un fermé. Si $(x_n)_n$ est une suite de A' qui converge vers $x \in E$, il faut montrer que $x \in A'$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ on ait $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Si $r_n = d(x_n, x) < \varepsilon$, la boule $B(x_n, \varepsilon - r_n)$ contienne une infinité d'éléments de A . Comme $B(x_n, \varepsilon - r_n) \subset B(x, \varepsilon)$, on en déduit que $B(x, \varepsilon)$ contient une infinité d'éléments de A , ce qui prouve bien que $x \in A'$.

Il reste à montrer que $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points d'accumulation A' de A et de l'ensemble des points isolés A^* de A . Tout d'abord, $A' \cap A^* = \emptyset$ et il est clair que $A' \subset \overline{A}$. Enfin nous avons de manière évidente $A^* \subset A$, donc $A^* \subset \overline{A}$.

Montrons maintenant la réciproque, c'est-à-dire que $\overline{A} \subset A^* \cup A'$. Si x est un point de $\overline{A}$ qui n'est pas un point d'accumulation alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ ou bien $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$. Le cas $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ est impossible puisque $x \in \overline{A}$. Nous avons donc $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$, ce qui montre que x est un point isolé.

□

⊕ **Principe des zéros isolés.** *Les zéros d'une fonction holomorphe non nulle sur un ouvert connexe sont isolés. En d'autres termes, si l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U a un point d'accumulation dans U , alors $f \equiv 0$.*

Remarque. Il est important que le point d'accumulation soit dans U , sinon le résultat est faux. Par exemple, si $U = D(0, 1)$ et si $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$, alors $f \in H(U)$ est non nulle et s'annule aux points $1 - \frac{1}{n\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. Rappelons que, si $Z(f)$ désigne l'ensemble des zéros de f , dire qu'ils sont isolés revient à dire que, pour tout $z \in Z(f)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Z(f) \cap D(z, \varepsilon) = \{z\}$.

Raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons que l'ensemble A des points d'accumulation de $Z(f)$ soit non vide. Nous allons

montrer que A est ouvert et fermé dans U , ce qui entraînera que $A = U$, donc que $f \equiv 0$ par continuité de f .

Il découle du rappel précédent que A est fermé.

Montrons donc que, si $A \neq \emptyset$, alors A est ouvert. Si $a \in A$, alors si $r = d(a, \partial U)$, nous avons

$$\forall z \in D(a, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f^{(n)}(a) = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $D(a, r)$ et donc $D(a, r) \subset A$, ce qui prouve que A est ouvert.

Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Notons p le plus petit entier naturel tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$. Au voisinage de a , nous avons

$$f(z) \sim \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (z - a)^p,$$

et $(z - a)^p$ ne s'annule qu'en a . On en déduit que f ne s'annule dans un certain voisinage de a qu'au point a , et ceci contredit le fait que a soit un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de f . C'est contradictoire, et le principe des zéros isolés est donc prouvé. $\square$

$\oplus$ **Corollaire.** Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(U)$ et $g \in H(U)$ sont deux fonctions qui coïncident sur un ensemble A qui a un point d'accumulation dans U , alors $f \equiv g$.

Applications (en exercice).

- ⊕ **Exercice 6.1.** Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ et $f \in H(D(a, R))$. Montrez que

$$\forall r \in [0, R[, \quad f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

(propriété de la moyenne).

- ⊕ **Exercice 6.2.** Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ et $f \in H(D(a, R))$. On rappelle que

$$\forall r \in [0, R[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Montrez les inégalités de Cauchy : Si $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(a, R)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

En déduire que toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante. (Théorème de Liouville).

Montrez le théorème de d'Alembert, c'est-à-dire que tout polynôme non constant s'annule sur $\mathbb{C}$ (appliquer le théorème de Liouville à $1/P$ si P ne s'annule pas).

- ⊕ **Principe du maximum.** Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$ et $a \in U$. Alors, ou bien f est constante dans U , ou bien tout voisinage de a contient un point b tel que $|f(b)| > |f(a)|$.

Preuve. Supposons qu'il existe $R > 0$ tel que $D(a, R) \subset U$ et tel que $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in D(a, R)$. Si on fixe $r \in [0, R[$ la fonction $\theta \in \mathbb{R} \mapsto f(a + re^{i\theta})$ est C^∞ , 2π -périodique. Nous

pouvons donc la développer en série de Fourier et appliquer la formule de Parseval :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f(a + re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

où

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Or, on peut écrire que

$$\forall z \in D(a, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

où la série converge uniformément sur $\overline{D}(a, r)$. Ceci nous donne

$$\forall n \in \mathbb{Z}_-, \quad c_n = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = a_n r^n.$$

L'identité de Parseval nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(a)|^2 = |a_0|^2,$$

ce qui nous donne $a_1 = a_2 = \dots = 0$, donc que f est constante dans U .

⊕ **Corollaire : Principe du maximum bis.** Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U , continue sur $\overline{U}$. Alors

$$\sup_U |f| = \sup_{\partial U} |f|,$$

autrement dit le maximum du module de f est atteint sur le bord de U .

Preuve. Tout d'abord, $|f|$ atteint son maximum sur $\overline{U}$ car $\overline{U}$ est compact et $|f|$ est continue sur $\overline{U}$. Si le maximum de $|f|$ est atteint en un point intérieur à U , alors on est ramené au principe du maximum précédemment prouvé que l'on applique dans la composante connexe contenant ce point. $\square$

Lemme de Schwarz. Soit $\Delta = D(0, 1)$ et $f \in H(\Delta)$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \Delta$, $|f(z)| \leq 1$. Alors pour tout $z \in \Delta$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.

De plus, s'il existe $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que

$$\forall z \in \Delta, \quad f(z) = \lambda z.$$

Autrement dit, f est une rotation.

Exercice 6.3. Montrez le lemme de Schwarz.

$\oplus$ **Théorème d'holomorphie sous le signe somme dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue avec $f(t, \cdot)$ holomorphe. Alors

$$F : U \ni z \mapsto \int_a^b f(t, z) dt$$

est holomorphe sur U et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F^{(k)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t, z) dt.$$

En effet, il découle du théorème de continuité sous le signe somme dans le cas de l'intégration sur un intervalle compact que F est continue.

Soit $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, 2r) \subset U$. Pour $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $|h| < r$, nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_a^b \frac{f(t, z+h) - f(t, z)}{h} dt.$$

Or, si on pose pour t fixé dans $[a, b]$, $g_t : [0, 1] \ni u \mapsto f(t, z + uh)$, alors g est C^1 sur $[0, 1]$, et

$$\begin{aligned} f(t, z+h) - f(t, z) &= g_t(1) - g_t(0) = \int_0^1 g'_t(u) du = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z + hu) h du, \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_a^b \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z + hu) du dt$$

Pour poursuivre, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme. Si φ est holomorphe dans un voisinage $D(z, 2r)$, on a

$$\forall w \in D(z, r) \quad \varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, 2r)} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - w)^2}.$$

Preuve du lemme. En effet, φ' est holomorphe donc

$$\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, 2r)} \frac{\varphi'(\zeta) d\zeta}{\zeta - w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'(w + 2re^{i\theta}) d\theta$$

Si $\phi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \varphi(w + 2re^{i\theta})$, alors $\phi'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \varphi'(w + 2re^{i\theta}) 2ire^{i\theta}$. En particulier,

$$\begin{aligned} \varphi'(w) &= \int_0^{2\pi} \frac{\phi'(\theta)}{2ire^{i\theta}} d\theta = \underbrace{\left[\frac{\phi(\theta)}{2ire^{i\theta}} \right]_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\phi(\theta)}{2re^{i\theta}} d\theta}_{= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, 2r)} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - w)^2}}. \end{aligned}$$

□

Appliquant le lemme, nous avons

$$\forall t \in [a, b], \quad \forall u \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, z + hu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, 2r)} \frac{f(t, \zeta) d\zeta}{(\zeta - z - hu)^2}.$$

Donc,

$$\forall t \in [a, b], \quad \forall u \in [0, 1], \quad \frac{\partial f}{\partial z}(t, z + hu) - \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, 2r)} \left(\frac{1}{(\zeta - z - hu)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) f(\zeta) d\zeta$$

et si $M = \max_{\overline{D}(z, 2r)} |f|$, alors

$$\forall t \in [a, b], \quad \forall u \in [0, 1],$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, z + hu) - \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) \right| \leq$$

$$\leq Mr \max_{\zeta \in \partial D(z, 2r)} \left| \frac{1}{(\zeta - z - hu)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ceci prouve que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h}$$

existe et vaut

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) dt.$$

□

⊕ **Théorème d'holomorphie sous le signe somme dans le cas de l'intégrale de Lebesgue.** Soient (Ω, μ) un espace mesuré, et U un ouvert de $\mathbb{C}$.

Soit $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- i. Pour tout $z \in U$, $t \mapsto f(t, z) \in L^1(\Omega)$
- ii. Pour presque tout $t \in \Omega$, $z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe
- iii. Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$ et pour tout $z \in U$, $|f(t, z)| \leq g(t)$.

Alors l'application

$$F : z \mapsto \int_{\Omega} f(t, z) d\mu(t)$$

est holomorphe dans U , et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_{\Omega} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(t, z) d\mu(t)$$

Preuve. On prend une suite (h_n) de nombres complexes qui tend vers 0 telle que, pour tout $z \in U$, $z + h_n \in U$. On a

$$\frac{F(z + h_n) - F(z)}{h_n} = \int_{\Omega} \frac{f(t, z + h_n) - f(t, z)}{h_n} dt.$$

De plus, on a

$$g_n(t) = \frac{f(t, z + h_n) - f(t, z)}{h_n} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(t, z + uh_n) du.$$

Soit $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, 2r) \subset U$. Il existe un rang N à partir duquel $z + h_n \in D(z, r)$. Le lemme précédent donne, pour $u \in [0, 1]$ et $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(t, z + uh_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z, 2r)} \frac{f(t, \zeta)}{(\zeta - (z + uh_n))^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t, z + uh_n + 2re^{i\theta})}{2re^{i\theta}} d\theta, \end{aligned}$$

donc

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, z + uh_n) \right| \leq \frac{g(t)}{2r}.$$

Le théorème de la convergence dominée donne la convergence de $g_n(t)$ vers $\frac{\partial f}{\partial z}(t, z)$ et la majoration $|g_n(t)| \leq \frac{g(t)}{r}$. Une nouvelle application du théorème de la convergence dominée donne le résultat. $\square$

$\oplus$ **Théorème de Weierstraß.** Soit U un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de $H(\Omega)$ qui converge uniformément sur tout compact de U . Alors $f \in H(U)$ et $(f'_n)_n$ converge uniformément vers f' sur tout compact de U .

Preuve. Tout d'abord, comme $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de U , on en déduit que f est continue sur U .

Soit K un compact de U et $r < d(K, \partial U)$. Alors $K_r = \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq r\}$ est un compact inclus dans U qui contient tous les disques $\overline{D}(z, r) \subset U$ quand $z \in K$.

On déduit des inégalités de Cauchy que, si une fonction $f \in H(U)$ et si $\|f\|_{K_r}$ désigne le sup de $|f|$ sur K_r , alors pour tout $z \in K$, comme $\overline{D}(z, r) \subset K_r$, on a

$$\|f'\|_K \leq \frac{\|f\|_{K_r}}{r}.$$

En particulier, la suite (f'_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction g continue.

Il reste à vérifier que f est holomorphe sur U et que $f' = g$.

Soit $z_0 \in U$ et $\alpha > 0$ tel que $D(z_0, \alpha) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, \alpha)$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$f_n(z) = f_n(z_0) + \int_{[z_0, z]} f'_n(\zeta) d\zeta.$$

La convergence uniforme sur tout compact de $(f_n)_n$ vers f et (f'_n) vers g nous donne

$$f(z) = f(z_0) + \int_{[z_0, z]} g(\zeta) d\zeta,$$

donc f est holomorphe dans $D(z_0, \alpha)$ et $f' = g$. $\square$

Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

$\oplus$ **Remarque.** *Le résultat précédent est radicalement différent de la situation sur l'axe réel ! En effet, une suite de fonctions indéfiniment dérivables (des polynômes par exemple) peut converger uniformément vers une fonction nulle part dérivable !*

7. Singularités isolées des fonctions holomorphes.

$\oplus$ **Définition.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in H(U \setminus \{a\})$. On dit que f a une *singularité isolée au point a* . Si f peut être définie en a de sorte que la fonction prolongée soit holomorphe, on dit que la singularité a est *artificielle*.

$\oplus$ **Théorème (Riemann).** *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in H(U \setminus \{a\})$ est bornée au voisinage de a , alors a est une singularité artificielle.*

Preuve. En effet, posons $h(a) = 0$ et $h(z) = (z - a)^2 f(z)$ pour $z \in U \setminus \{a\}$.

Soit $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset U$ et M tel que pour tout $z \in U$, $0 < |z - a| < r$ implique $|f(z)| \leq M$.

Nous avons pour $0 < |z - a| < r$,

$$\left| \frac{h(z) - h(a)}{z - a} \right| \leq M|z - a|,$$

ce qui montre que h est holomorphe dans U et que $h'(a) = 0$.

Nous avons donc l'existence d'une suite (c_n) avec $c_0 = c_1$ telle que

$$\forall z \in D(a, r), \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Nous obtenons l'extension holomorphe désirée de f en posant $f(0) = c_2$ car alors

$$\forall z \in D(a, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z - a)^n.$$

⊕ **Théorème de Casorati-Weierstraß.** *Si $a \in U$ et si $f \in H(U \setminus \{a\})$, l'un des trois cas suivants doit se produire :*

(a) *f a une singularité artificielle en a*

(b) *Il existe des nombres complexes $c_1, \dots, c_m$ où m est un entier positif et où $c_m \neq 0$ tels que*

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - a)^k}$$

ait une singularité artificielle en a .

(c) *Si $r > 0$ et $D(a, r) \subset U$, l'image $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ est dense dans le plan complexe.*

Dans le cas (b), on dit que f a un pôle d'ordre m en a . La fonction

$$\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - a)^k}$$

qui est un polynôme en $(z-a)^{-1}$ est appelée la *partie principale* de f en a . Il est clair que dans cette situation $|f(z)| \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow a$.

Dans le cas (c), on dit que f a une *singularité essentielle* en a .

Preuve. Supposons que (c) soit faux. Il existe $r > 0$ et $\delta > 0$ et un nombre complexe w tels que $|f(z) - w| > \delta$ dans $D(a, r) \setminus \{a\}$. Si on note $D = D(a, r)$ et $D' = D(a, r) \setminus \{a\}$, et si on pose

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in D'$$

alors $g \in H(D')$ et $|g| \leq 1/\delta$. g se prolonge donc en une fonction holomorphe dans D .

Si $g(a) \neq 0$, la définition de g montre que f est bornée dans $D(a, \rho) \setminus \{a\}$ donc (a) est vraie.

Si g a un zéro d'ordre $m \geq 1$ en a , alors

$$g(z) = (z - a)^m g_1(z), \quad z \in D,$$

avec $g_1 \in H(D)$ et $g_1(a) \neq 0$. En plus g_1 n'a pas de zéro dans D' d'après la définition de g . On en déduit que

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^m} \frac{1}{g_1(z)} + w$$

et où $1/g_1$ est holomorphe dans un voisinage de a . En particulier, on peut écrire dans un voisinage de a

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

et nous sommes alors dans le cas (b). □

Remarque. La fonction f possède un pôle en a si et seulement si $|f(z)| \rightarrow_{z \rightarrow a} +\infty$.

En effet, si $|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow a} +\infty$, alors $g(z) = 1/f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de a . On en déduit le résultat suivant l'ordre de a pour g .

Exemple. *Un exemple d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ayant une singularité essentielle en 0 : $f(z) = \exp(1/z)$.*

⊕ **Définition.** Soit U un ouvert, $a \in U$, et $f \in H(U \setminus \{a\})$. Supposons que f ait un pôle en a dont la partie principale est

$$\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}.$$

Le nombre c_1 est appelé le *Résidu* de f en a et noté $\text{Res}(f, a)$.

⊕ **Théorème des résidus.** *Soit U un ouvert étoilé, $a_1, \dots, a_n$ des points distincts de U . Soit $f \in H(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. Supposons que f ait un pôle en chaque points $a_1, \dots, a_n$. Si γ est un chemin fermé dans U tel que $a_k \notin \gamma^*$ pour $k = 1, \dots, n$, on a*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(a_k).$$

Preuve. Soit Q_k la partie principale de f en a_k . Comme $f - (Q_1 + \dots + Q_n)$ n'a que des singularités artificielles dans U , le théorème de Cauchy montre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (f(z) - Q_1(z) - \dots - Q_n(z)) dz = 0.$$

Or pour $k \in \{1, \dots, n\}$, nous avons

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q_k(z) dz = \text{Res}(f, a_k) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(a_k).$$

⊕ **Corollaire.** Soit U un ouvert, $\overline{D}(a, r)$ un disque fermé inclus dans U et $f \in H(U)$ tel que f ne s'annule pas sur $\partial D(a, r)$. Alors le nombre de zéros de f dans le disque $D(a, r)$ est égal à $\text{Ind}_0 f(\partial D(a, r))$, le bord du disque étant parcouru dans le sens positif.

Preuve. En effet, si a_1, a_n sont les zéros de f dans $D(a, r)$, comptés avec les multiplicités m_k , alors au voisinage de a_k , $f(z) = (z - a_k)^{m_k} f_k(z)$ où f_k ne s'annule pas au voisinage de a_k , donc au voisinage de a_k

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_k}{z - a_k} + \frac{f'_k(z)}{f_k(z)}.$$

Ceci implique que $\text{Res}(f'/f, a_k) = m_k$, donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n m_k,$$

c'est-à-dire que la dernière intégrale est égale au nombre de zéros recherché.

Or

$$\begin{aligned} \text{Ind}_0(f(\partial D(a, r))) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial D(a, r))} \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(a + re^{it}) re^{it} dt}{f(a + re^{it})} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned} \quad \square$$

8. Fonctions méromorphes.

⊕ **Définition des fonctions méromorphes.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction f sur U est dite *méromorphe* sur U si et seulement si il existe un ensemble S de points isolés dans U tel que $f \in H(U \setminus S)$ et tel que les éléments de S soient des pôles de f . En particulier, pour tout $\alpha \in S$, il existe un voisinage D_α ouvert et connexe dans U tel que

$$\exists g_\alpha, h_\alpha \in H(D_\alpha), \quad \forall z \in D_\alpha \setminus \{\alpha\}, \quad f(z) = \frac{g_\alpha(z)}{h_\alpha(z)}.$$

On note $M(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U .

On peut montrer (théorème de Mittag-Leffler, Rudin, p. 353) que tout fonction méromorphe sur U est en fait globalement le quotient de deux fonctions holomorphes sur U . De plus, les fonctions méromorphes forment un corps.

⊕ **Séries de Laurent.** On appelle *série de Laurent en $a \in \mathbb{C}$* une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z - a)^n,$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille de complexes indexée sur $\mathbb{Z}$. La série converge pour $z \in \mathbb{C}$ si chacune des deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - a)^{-n}$ converge.

Le résidu d'une série de Laurent au point a est alors le coefficient a_{-1} . Si a est un pôle d'ordre m d'une fonction f , nous avons alors

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} [(z-a)^{m-1} f(z)].$$

9. Applications de la formule des Résidus.

⊕ **Dénombrement des zéros et des pôles.** Soit U un ouvert, $\overline{D}(a, r)$ un disque fermé inclus dans U et $f \in M(U)$ tel que f n'ayant ni zéro, ni pôle sur $\partial D(a, r)$. Alors la différence du nombre Z de zéros de f dans le disque $D(a, r)$ et du nombre de pôles de f dans le disque $D(a, r)$ est égale à $\text{Ind}_0 f(\partial D(a, r))$, le bord du disque étant parcouru dans le sens positif.

Preuve. Analogue à la preuve du corollaire du théorème des résidus.

⊕ **Théorème de l'application ouverte.** Soit U un ouvert connexe et $f \in H(U)$ non constante. Alors f est ouverte, c'est-à-dire que l'image par f d'un ouvert est un ouvert.

Preuve. Soit $U' \subset U$ un ouvert non vide et $w_0 \in f(U')$. Il existe $z_0 \in U'$ tel que $w_0 = f(z_0)$. On veut montrer qu'il existe un voisinage V' de w_0 tel que tout $w \in V'$ soit dans $f(U')$, c'est-à-dire que pour tout $w \in V'$, la fonction

$$z \mapsto f(z) - w$$

admette un zéro dans U' . Or, si $r > 0$ est tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U'$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial D(z_0, r))} \frac{dz}{z - f(z_0)} = \\ &= \text{Ind}_{f(\partial D(z_0, r))}(f(z_0)). \end{aligned}$$

Puisque le premier membre est supérieur ou égal à 1 (car $z \mapsto f(z) - w_0$ a au moins un zéro dans $D(z_0, r)$), on en déduit que

$$1 \leq \text{Ind}_{f(\partial D(z_0, r))}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w}$$

pour w assez proche de w_0 . Ceci achève la preuve. $\square$

$\oplus$ **Calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}$ de fractions rationnelles.** Soit à calculer

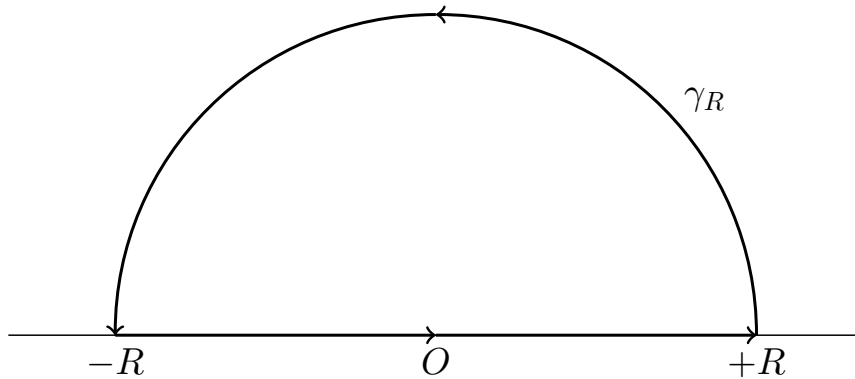
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P) + 2$.

On pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ que l'on intègre sur le contour γ_R formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le sens direct dans le demi-plan supérieur, et nous faisons tendre R vers $+\infty$. Nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum \text{Res}(f, \text{Im } z > 0).$$

La figure suivante illustre la méthode précédente :



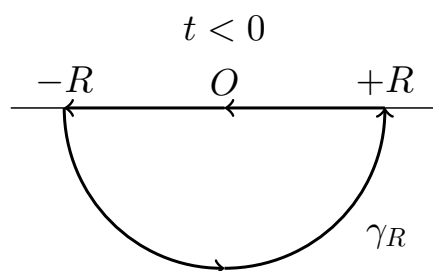
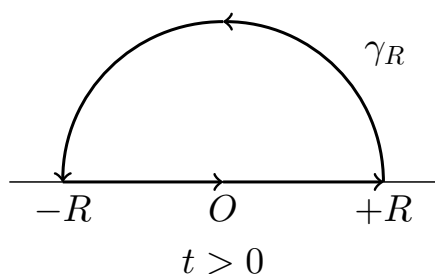
⊕ Calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}$ du produit d'une fraction rationnelle par une exponentielle complexe. Soit à calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P) + 1$.

On pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{itz}$, et si $t > 0$, on intègre sur le contour γ_R formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle de rayon R joignant R à $-R$ dans le sens direct dans le demi-plan supérieur, et nous faisons tendre R vers $+\infty$. Si $t < 0$, nous prenons le symétrique par rapport à l'axe des x du contour précédent. Nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{itx} dx = \sum \text{Res}(f, 1/2 \text{ plan choisi}).$$



⊕ Calcul d'intégrales sur $\mathbb{R}$ du produit d'une fraction rationnelle par une puissance. Soit à calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{s-1} dx$$

où P et Q sont deux polynômes, $s \in]0, 1[$, Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $d^o(Q) \geq d^o(P) + 1$.

On pose $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{(s-1)\text{Ln} z}$, où Ln est la représentation du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. On intègre sur le contour $\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}$ formé du segment $[\varepsilon e^{i\alpha}, Re^{i\alpha}]$, de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon R joignant les points $Re^{i\alpha}$ et $Re^{-i\alpha}$ dans le sens direct, du segment $[Re^{-i\alpha}, \varepsilon e^{-i\alpha}]$ et de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon ε joignant les points $\varepsilon e^{-i\alpha}$ à $\varepsilon e^{i\alpha}$ dans le sens indirect, puis nous faisons tendre ε et α vers 0 et R vers $+\infty$. Nous avons

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{s-1} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi s}}{\sin \pi s} \sum \text{Res}(f, \mathbb{C}).$$

