Corrigé de la question 4 de l'exercice 4 de la planche 3.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent ainsi que $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$, alors

$$(\sum u_n)(\sum v_n) = \sum w_n.$$

En effet, posons $U_N = \sum_{n=0}^N u_n$, $V_N = \sum_{n=0}^N v_n$ et $W_N = \sum_{n=0}^N w_n$. On a

$$w_0 = u_0 v_0$$

$$w_1 = u_0 v_1 + v_1 u_0$$

$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0$$

$$w_3 = u_0 v_3 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_3 v_0$$

$$\vdots$$

Une récurrence sur N nous donne

$$W_N = u_0 V_N + u_1 V_{N-1} + \cdots + u_{N-1} V_1 + u_N V_0.$$

Une autre récurrence sur N nous donne

$$W_0 + \cdots W_N = U_0 V_N + U_1 V_{N-1} + \cdots + U_{N-1} V_1 + U_N V_0.$$

Si on suppose que $\sum w_n$ converge, alors W_N converge et par Césaro,

$$\frac{1}{N+1}(W_0 + \cdots W_N) \text{ converge vers } \sum w_n.$$

Il reste à vérifier que

$$\frac{1}{N+1}(U_0 V_N + U_1 V_{N-1} + \cdots + U_{N-1} V_1 + U_N V_0)$$

converge vers $(\sum u_n)(\sum v_n)$ pour conclure. Pour cela, on pose $U = \sum u_n = \lim\limits_{N\to+\infty} U_N$ et $V = \sum v_n = \lim\limits_{N\to+\infty} V_N$ et on écrit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N+1}(U_0 V_N + U_1 V_{N-1} + \cdots + U_{N-1} V_1 + U_N V_0) = \\
&\qquad \frac{1}{N+1}((U_0 - U) V_N + (U_1 - U) V_{N-1} + \cdots + (U_{N-1} - U) V_1 + (U_N - U) V_0) \\
&\qquad\qquad + \frac{U}{N+1}(V_0 + \cdots + V_N)
\end{aligned}$$

Le terme $\frac{U}{N+1}(V_0 + \cdots + V_N)$ tend vers UV par Césaro. Il suffit de montrer que $\frac{1}{N+1}((U_0 - U) V_N + (U_1 - U) V_{N-1} + \cdots + (U_{N-1} - U) V_1 + (U_N - U) V_0)$ tend vers 0 pour conclure. Pour cela, on remarque que la suite (V_N) converge donc est bornée, mettons par M en module. On a alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N+1}|((U_0 - U) V_N + (U_1 - U) V_{N-1} + \cdots + (U_{N-1} - U) V_1 + (U_N - U) V_0)| \\
&\qquad \leq M \frac{1}{N+1}(|U_0 - U| + |U_1 - U| + \cdots + |U_{N-1} - U| + |U_N - U|)
\end{aligned}$$

qui tend donc vers 0, toujours par Césaro. Le résultat est donc prouvé.