Université de Provence 2012–2013

Introduction à l'Analyse

CHAPITRE 4 - INTÉGRATION DES FONCTIONS CONTINUES.

1 Primitives d'une fonction continue.

Théorème et définition. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors f admet une primitive F, c'est-à-dire une fonction dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Théorème.

• *Deux primitives de f diffèrent d'une constante. En d'autres termes, si F est une primitive de f sur I, toutes les primitives de f sont de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante quelconque.*

• *Si f est continue sur un intervalle I contenant a, la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

• *On note $\int f(x)dx$ l'une quelconque des primitives de f. Autrement dit, si F est une primitive de f, on écrira*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

où C désignera toujours une constante complexe.

• *Pour toute primitive F de f sur I, on a :*

$$\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a).$$

Le calcul d'intégrales de fonctions continues se ramène donc à la recherche de primitives.

• *Pour toute fonction f de classe C^1 sur I (c'est-à-dire continue, dérivable, et dont la dérivée est continue) on a :*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

2 Méthodes de calcul.

2.1 Linéarité.

Si F et G sont des primitives respectives de f et g sur I et k est un complexe, alors sur I, $F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF est une primitive de kf.

2.2 Tableau des primitives usuelles importantes (à connaître sans faute)

fonction f	primitive F	Intervalle de validité
0	C	$\mathbb{R}$
1	$x+C$	$\mathbb{R}$
$x^n, \quad n\in\mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\mathbb{R}$
$x^n, \quad n=-2,-3\dots$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
e^x	e^x+C	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$
$e^{\alpha x},\ \alpha\in\mathbb{C}^*$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}+C$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x+C$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$	$]-1,1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x+C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln(\mathrm{ch}\ x)+C$	$\mathbb{R}$

Remarque. Pour $\alpha\in\mathbb{C}$, on définit la fonction $x\in]0,+\infty[\mapsto x^\alpha$ par

$$\forall x>0, \qquad x^\alpha=e^{\alpha\ln x}.$$

Comme la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$, par composition de fonctions la fonction x^α est dérivable sur $]0,+\infty[$. Et on a

$$\forall x>0, \qquad \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=\frac{1}{\alpha+1}\left(e^{(\alpha+1)\ln x}\right)'=\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha+1}{x}e^{(\alpha+1)\ln x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}e^{(\alpha+1)\ln x}=e^{-\ln x}e^{(\alpha+1)\ln x}=e^{\alpha\ln x}=x^\alpha.$$

2.3 Tableau d'autres primitives (données pour information).

Par définition, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \cot\tan x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	$]k\pi, k\pi+\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$	$\frac{1}{\tan x} + C$	$]k\pi, k\pi+\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\text{th } x}$	$\ln\lvert \text{ sh } x\rvert + C$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\text{ch }^2 x} = 1 - \text{ th }^2 x$	$\text{th } x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\text{sh }^2 x} = \frac{1}{\text{th }^2 x} - 1$	$-\frac{1}{\text{th } x} + C$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arg\,sh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arg\,ch} x + C = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert + C$	$]1, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$-\operatorname{arg\,ch}(-x) + C = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert + C$	$]-\infty, -1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arg\,th} x + C = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert + C$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert + C$	$]-\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[$

2.4 Obtention de primitive par changement de variables.

Soit $f : I \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I.

Soit $F : I \to \mathbb{C}$ une primitive de f.

Si on pose $x = \varphi(t)$ où $\varphi : J \to I$ est une application continue, dérivable et à dérivée continue (on dit que φ est de classe C^1) de l'intervalle J dans I, alors

$$\forall t \in J, \qquad [F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

donc

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

D'autre part, si $x = \varphi(t)$, on a

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donc

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx + C. \qquad (*)$$

Pour retenir cette formule, il suffit d'écrire $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$.

2.5 Intégration par changement de variables dans une intégrale définie

Théorème. *Soit I un intervalle,*

a, b dans $\mathbb{R}$

$\varphi : [a, b] \to I$ une fonction de classe C^1 à valeurs dans I,

$f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Si de plus $\alpha, \beta \in I$ et φ est bijective, alors

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Preuve.

En effet, $(*)$ nous donne

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

La seconde formule s'obtient en écrivant que, si φ est bijective, $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$ si et seulement si $a = \varphi^{-1}(\alpha)$ et $b = \varphi^{-1}(\beta)$.

□

2.6 Intégration par parties.

Tout repose sur le fait que, si I est un intervalle, $u, v : I \to \mathbb{C}$ des fonctions de classe C^1 (*i.e.* dérivables et à dérivées continues), alors

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Ceci nous donne

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x) + C$$

donc

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx + C$$

et, pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

On utilise classiquement l'intégration par parties pour calculer des intégrales du type

$$P(x)\sin(\alpha x + \beta), \quad P(x)\cos(\alpha x + \beta), \quad P(x)e^{\alpha x + \beta}, \quad P(x)\ln x, \quad e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

où P est un polynôme, α et β sont des nombres réels.

On peut aussi calculer les deux dernière intégrales en utilisant l'exponentielle complexe.

2.7 Polynômes en $\cos$ et $\sin$.

On veut calculer $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ où $m, n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent :

- L'un des entiers est impair (par exemple $n = 2p+1$). On a alors

$$\int \sin^m x \cos nx\, dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x\, dx.$$

En effectuant le changement de variable $t = \sin x$, on se ramène à intégrer un polynôme.

- Les deux entiers m et n sont pairs : on linéarise avec les formules d'Euler.

2.8 Fractions rationnelles.

Définition et théorème. On appelle fraction rationnelle toute fonction qui est le quotient de deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

On appelle éléments simples (dans $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles

$$\frac{a}{(x-\alpha)^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$$

où $a, b, \alpha, p, q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p^2 - 4q < 0$.

Toute fraction rationnelle est la somme d'un polynôme et d'une somme finie d'éléments simples.

Pour intégrer une fraction rationnelle, il faut donc la décomposer en éléments simples, puis intégrer les éléments simples.

On a

$$\begin{aligned} \int \frac{a\, dx}{(x-\alpha)^n} &= \frac{a}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} + C \qquad \text{si } n \neq 1 \\ &= a \ln|x-\alpha| \qquad \text{si } n = 1. \end{aligned}$$

Enfin, pour

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n},$$

on écrit

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = \frac{a}{2}\frac{2x+\frac{2b}{a}}{(x^2+px+q)^n} = \underbrace{\frac{a}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}}_{=(1)} + \underbrace{\frac{a}{2}\frac{\frac{2b}{a}-p}{(x^2+px+q)^n}}_{=(2)}$$

En posant $u = x^2+px+q$, on a

$$(1) = \frac{a}{2}\frac{u'}{u^n}$$

qui s'intègre facilement.

Pour (2), on écrit que

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

on pose $v = x + \frac{p}{2}$ et on se ramène à intégrer une fraction du type

$$\frac{a'}{(v^2 + b'^2)^n}$$

où $a', b' \in \mathbb{R}$.

Si on pose $v = b'w$, on se ramène à intégrer une fraction du type

$$\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Posons $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

$I_1(x) = \arctan x + C$.

Pour calculer $I_n(x)$, on intègre par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = I_{n+1}(x) + \frac{1}{2}\int x \times \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= I_{n+1}(x) - \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = I_{n+1}(x) - \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n} I_n(x).$$

Ceci permet d'exprimer par récurrence I_{n+1} en fonction de $I_n(x)$.

2.9 Fractions rationnelles en $\sin$ et $\cos$, e^x, ch et sh.

On cherche à calculer

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

où R est une fraction rationnelle en 2 variables.

Règle de Bioche.

- Si $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi - x$, on pose $t = \sin x$.

- Si $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangé en changeant x en $-x$, on pose $t = \cos x$.

- Si $R(\sin x, \cos x)dx$ reste inchangé en changeant x en $\pi + x$, on pose $t = \tan x$.

Sinon, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$ et on est ramené à calculer

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Pour les primitives

$$\int R(\text{ sh } x, \text{ ch } x) dx$$

où R est une fraction rationnelle en 2 variables, on remplace sh par $\sin$, ch par $\cos$, la règle de Bioche nous donne un changement de variable, et on refait la transformation inverse.

Enfin, si R est une fraction rationnelle d'une seule variable, on calcule

$$\int R(e^x) dx$$

en posant $u = e^x$.

2.10 Intégrales abéliennes.

Pour calculer les primitives de la forme $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$