Université d'Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'Analyse

Chapitre 1 - Fonctions Usuelles

1 Fonctions trigonométriques : Formules à connaître.

Formules de duplication. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que x, y et $x+y$ ne soient pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x, \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et pas de la forme $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Formules de linéarisation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Formules de déphasage. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \qquad \sin(\pi - x) = \sin x, \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(\pi - x) = -\tan x, \qquad \tan(x + \pi) = \tan x.$$

Limites et dérivées.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

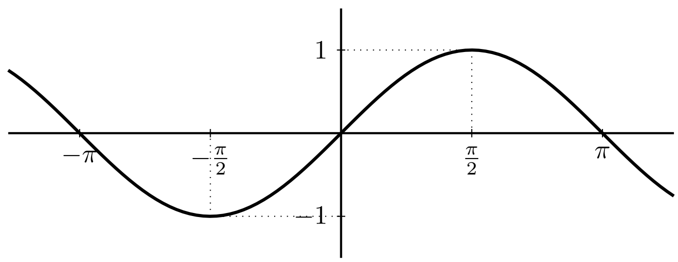
$$\sin'(x) = \cos x, \qquad \cos'(x) = -\sin x.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction tan est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et, pour tout x dans cet intervalle,

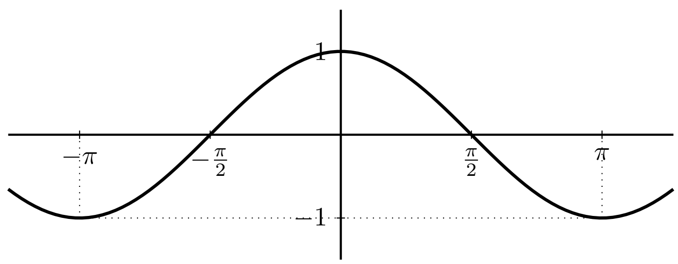
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Les graphes des fonctions sin, cos et tan sont les suivants :

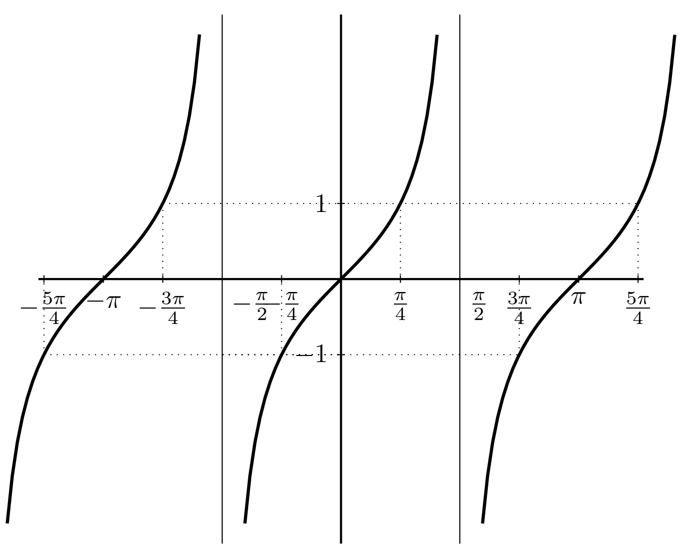
sin :



cos :



tan :



Quelques valeurs à connaître.

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0 \qquad \tan 0 = 0$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \text{non défini}$$

2 Fonctions trigonométriques réciproques.

2.1 La fonction arc sinus.

Définition. La fonction $\varphi : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \mapsto \sin x \in [-1,1]$ est une bijection continue et dérivable de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$.

Pour tout élément y de $[-1,1]$ il existe donc un unique $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin x = y$. Cet élément x est appelé l'*arc sinus* de y et on note $x = \text{arc}\sin y$.

En particulier, on a
$$\forall y \in [-1,1], \qquad \sin(\text{arc}\ \sin y) = y$$
et
$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \qquad \text{arc}\ \sin(\sin x) = x.$$

La fonction sinus étant dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et sa dérivée ne s'annulant pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que $\text{arc}\sin$ est dérivable sur $[-1,1]$ privé des points $\varphi(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$.

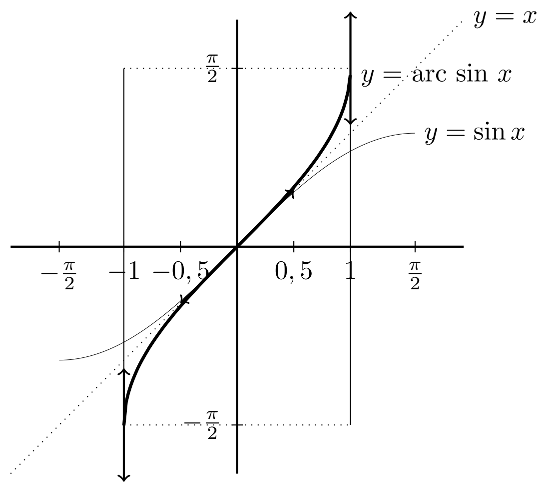
En particulier, $\text{arc}\sin$ est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $y \in]-1,1[$, comme $\sin(\text{arc}\sin y) = y$, on obtient, en dérivant, $\text{arc}\sin'(y) \times \sin'(\text{arc}\sin y) = 1$, soit encore $\text{arc}\sin'(y) = \dfrac{1}{\cos(\text{arc}\ \sin y)}$.

Or, pour $y \in]-1,1[$, $\cos(\text{arc}\sin y) \geq 0$ car $\text{arc}\sin y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit que, pour $y \in]-1,1[$, $\cos(\text{arc}\sin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{arc}\ \sin y)} = \sqrt{1-y^2}$, donc

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad \text{arc}\ \sin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

D'où le graphe de la fonction arc sinus (obtenu en prenant l'image du graphe de sin par la symétrie par rapport à la droite $y = x$) :



Nous avons les valeurs remarquables suivantes :

$$\text{arc }\sin 0 = 0 \quad ; \quad \text{arc }\sin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \text{arc }\sin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \text{arc }\sin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \text{arc }\sin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

De plus

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \text{arc}\sin(-x) = -\text{arc}\sin x.$$

2.2 La fonction arc cosinus.

Définition. La fonction $\psi : [0,\pi] \ni x \mapsto \cos x \in [-1,1]$ est une bijection continue et dérivable de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$.

Pour tout élément y de $[-1,1]$ il existe donc un unique $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos x = y$. Cet élément x est appelé l'*arc cosinus* de y et on note $x =$arc $\cos y$. En particulier, on a

$$\forall y \in [-1,1], \qquad \cos(\text{arc }\cos y) = y$$

et

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad \text{arc }\cos(\cos x) = x.$$

La fonction cosinus étant dérivable sur $[0,\pi]$, et sa dérivée ne s'annulant pas sur $]0,\pi[$, on en déduit que arc cos est dérivable sur $[-1,1]$ privé des points $\psi(0) = 1$ et $\psi(\pi) = -1$.

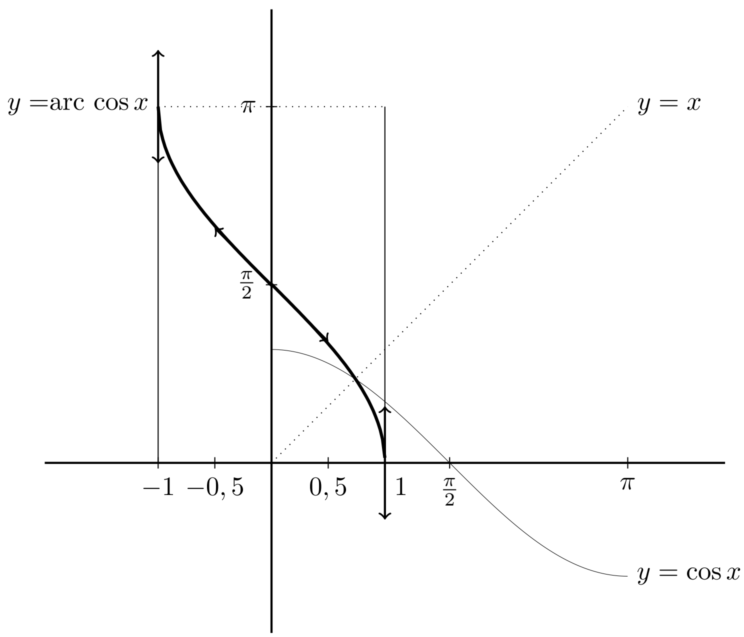
En particulier, arc cos est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $y \in]-1,1[$, comme $\cos(\text{arc}\cos y) = y$, on obtient, en dérivant, $\text{arc}\cos'(y) \times \cos'(\text{arc}\cos y) = 1$, soit encore $\text{arc}\cos'(y) = -\dfrac{1}{\sin(\text{arc }\cos y)}$.

Or, pour $y \in]-1,1[$, $\sin(\arccos y) \geq 0$ car $\arccos y \in]0,\pi[$.

On en déduit que, pour $y \in]-1,1[$, $\sin(\arccos y) = \sqrt{1-\cos^2(\text{arc } \cos y)} = \sqrt{1-y^2}$, donc

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad \text{arc } \cos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

D'où le graphe de la fonction arc cosinus (obtenu en prenant l'image du graphe de cos par la symétrie par rapport à la droite $y = x$) :



Nous avons les valeurs remarquables suivantes :

$$\text{arc } \cos 0 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \text{arc } \cos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \text{arc } \cos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \text{arc } \cos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \text{arc } \cos 1 = 0.$$

De plus

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

En effet, $(\pi - \arccos x) \in [0,\pi]$ et $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

Autre preuve : la fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui à $x \in [-1,1]$ associe arc cos $(-x)+$ arc cos x est continue et dérivable sur $]-1,1[$. Or pour tout $x \in]-1,1[$, $\varphi'(x) = -\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, donc φ est constante sur $]-1,1[$. Comme φ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que φ est constante sur $[-1,1]$. Comme $\varphi(0) = 2\,\text{arc cos } 0 = \pi$, nous obtenons le résultat.

2.3 Lien entre arc sin et arc cos.

Nous avons la formule suivante :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

En effet, si $x \in [-1,1]$, alors $\arccos x \in [0,\pi]$, donc $(\frac{\pi}{2} - \arccos x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x$, on en déduit que $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \text{arc} \sin x$.

Autre preuve : la fonction $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui à $x \in [-1,1]$ associe arc cos $x+$ arc sin x est continue et dérivable sur $]-1,1[$. Or pour tout $x \in]-1,1[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, donc φ est constante sur $]-1,1[$. Comme φ est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que φ est constante sur $[-1,1]$. Comme $\varphi(0) =$ arc cos 0$= \frac{\pi}{2}$, nous obtenons le résultat.

2.4 La fonction arc tangente.

Définition. La fonction $\phi :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ni x \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ est une bijection continue et dérivable de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément y de $\mathbb{R}$ il existe donc un unique $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan x = y$. Cet élément x est appelé l'*arc tangente* de y et on note $x =$arc $\tan y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \tan(\text{arc } \tan y) = y$$

et

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \qquad \text{arc } \tan(\tan x) = x.$$

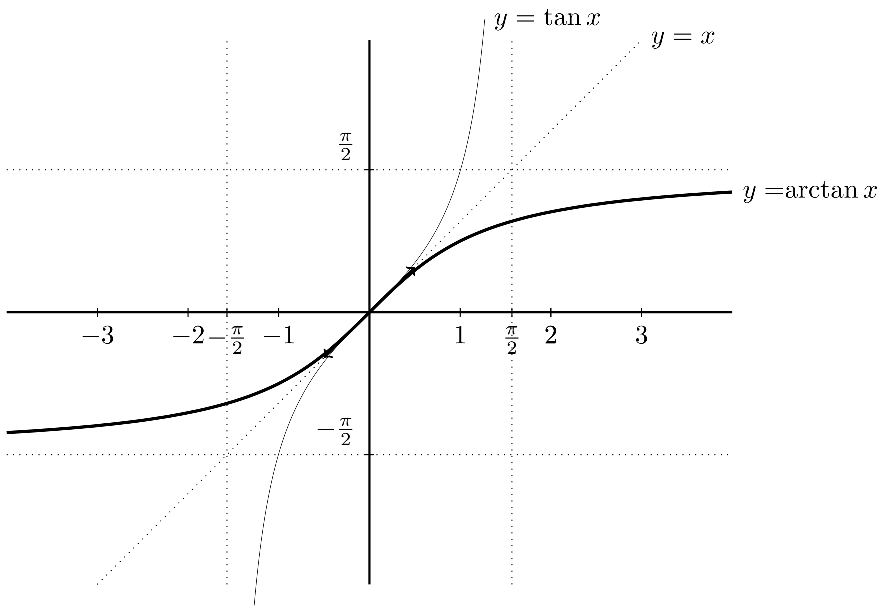
La fonction tangente étant dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et sa dérivée ne s'annulant pas, on en déduit que arc tan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, comme $\tan(\arctan y) = y$, on obtient, en dérivant, $\arctan'(y) \times \tan'(\arctan y) = 1$, soit encore $\arctan'(y) = \dfrac{1}{\tan'(\text{arc } \tan y)} = \dfrac{1}{1 + \tan^2(\text{arc } \tan y)}$.

On en déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \text{arc } \tan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

D'où le graphe de la fonction arc tangente (obtenu en prenant l'image du graphe de tan par la symétrie par rapport à la droite $y = x$) :



Nous avons les valeurs remarquables suivantes :

$$\text{arc } \tan 0 = 0 \quad ; \quad \text{arc } \tan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \text{arc } \tan 1 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \text{arc } \tan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

De plus

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad \text{arc}\tan(-x) = -\text{arc}\tan x.$$

3 La fonction exp.

Proposition. *Pour tout $x \geq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Preuve. On le prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ et pour $x \geq 0$, nous avons

$$e^x \geq 1$$

donc la propriété est vraie.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n, c'est-à-dire que

$$\forall t \geq 0, \qquad e^t \geq 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!},$$

et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

En intégrant cette inégalité entre 0 et $x \geq 0$, nous avons

$$\forall x \geq 0, \qquad \int_0^x e^t dx \geq \int_0^x \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) dt = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{t}{1!} dt + \int_0^x \frac{t^2}{2!} dt + \cdots + \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt.$$

Or, comme pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^x \frac{t^k}{k!} dt = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

on en déduit, comme d'une part

$$\forall x \geq 0, \qquad \int_0^x e^t dx = e^x - 1$$

et que d'autre part,

$$\int_0^x dt + \int_0^x \frac{t}{1!} dt + \int_0^x \frac{t^2}{2!} dt + \cdots + \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

que

$$\forall x \geq 0, \qquad e^x - 1 \geq x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ceci montre que la propriété est vraie au rang $n+1$. On a donc prouvé la proposition par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Proposition. *Nous avons les limites suivantes :*

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Preuve. Prouvons la première limite. Soit $\alpha > 0$ et soit n un entier strictement plus grand que α. En appliquant la proposition précédente, nous avons

$$\forall x \geq 0, \qquad e^x \geq 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^n}{n!},$$

donc

$$\forall x \geq 0, \qquad \frac{e^x}{x^\alpha} \geq \frac{x^{n-\alpha}}{n!} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

car $n - \alpha > 0$.

Prouvons la seconde limite. Posons $\beta = 1/\alpha$. Comme $\beta > 0$, nous avons

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^\beta} = +\infty.$$

En particulier, si on pose $u = \ln x$, alors quand $x \to +\infty$, on a $u \to +\infty$. Donc

$$\frac{e^{(\ln x)}}{(\ln x)^\beta} = \frac{x}{\ln^\beta x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit en prenant la puissance $\alpha-$ième que

$$\left(\frac{x}{\ln^\beta x}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{\ln^{\beta\alpha} x} = \frac{x^\alpha}{\ln x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc que

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Prouvons la troisième limite. Si on pose $u = 1/x$, alors quand $x \to 0+$, on a $u \to +\infty$. On en déduit que

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^\alpha}} = -x^\alpha \ln x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et la proposition est prouvée.

4 L'exponentielle complexe.

Définition. On appelle *intervalle de* $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a,b], \quad [a,b[, \quad]a,b], \quad]a,b[, \quad]b,+\infty[, \quad [b,+\infty[, \quad]-\infty,a], \quad]-\infty,a[, \quad]-\infty,+\infty[$$

où $a < b$ sont deux réels.

L'objet de la définition suivante est de définir la notion de fonctions dérivables mais à valeurs complexes. Cette notion est très naturelle, et est importante pour résoudre des équations différentielles, notamment d'ordre supérieur ou égal à 2.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$f : x \in I \mapsto u(x) + iv(x)$$

une fonction à valeurs complexes et où u et v désignent respectivement la partie réelle et imaginaire de f. On dit que f est *dérivable sur* I si et seulement si u et v sont dérivables, et on note alors :

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

On vérifie facilement que, si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes, la fonction fg est encore dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.

Enfin, si $f : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle est dérivable et vérifie $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante. En effet, si $f = u + iv$ alors u' et v' valent 0, donc u et v sont constantes.

On rappelle la définition suivante

Définition. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on note

$$e^z = \exp z = e^x \times e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Nous avons les propriétés suivantes :

Propriété 1. *Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors*

$$e^z \neq 0 \qquad \textit{et} \qquad |e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$

En effet, $|e^z| = e^x|\cos y + i\sin y| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z} > 0$, donc $e^z \neq 0$. $\square$

Propriété 2. *Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors*

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

En effet, si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2))$$

et

$$\begin{aligned} e^{z_1} \times e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \cos y_2 \sin y_1)) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) \end{aligned}$$

grâce aux formules de duplication pour cos et sin. $\square$

Propriété 3. Si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$(e^z)^{-1} = e^{-z}.$$

Cela découle de la propriété 2 :

$$e^z \times e^{-z} = e^{-z} \times e^z = e^{z-z} = e^0 = 1. \qquad \square$$

Propriété 4. *Si $a \in \mathbb{C}$ et si*

$$\varphi_a : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{at},$$

alors φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_a'(t) = a\varphi_a(t).$$

Preuve. En effet, pour $t \in \mathbb{R}$, et si $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\varphi_a(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)).$$

Donc φ_a est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi_a'(t) = (e^{\alpha t}\cos\beta t)' + i(e^{\alpha t}\sin(\beta t))' &= (\alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t)) + i(\alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t)) \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) = a\varphi_a(t). \qquad \square \end{aligned}$$

Autre Preuve de la propriété 2 et utilisant la propriété 4. Posons $\varphi(t) = (e^{t(z_1+z_2)} - e^{tz_1}e^{tz_2})e^{-t(z_1+z_2)}$ pour $t \in \mathbb{R}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\varphi'(t) = ((z_1 + z_2)e^{t(z_1+z_2)} - z_1e^{tz_1}e^{tz_2} - z_2e^{tz_1}e^{tz_2})e^{-t(z_1+z_2)} + (e^{t(z_1+z_2)} - e^{tz_1}e^{tz_2})(-(z_1 + z_2))e^{-t(z_1+z_2)}$$

$$= (z_1+z_2)\varphi(t)e^{-t(z_1+z_2)} - (z_1+z_2)\varphi(t)e^{-t(z_1+z_2)} = 0.$$

Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(0) = (1-1\times 1)\times 1 = 0$, on en déduit que φ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi(1) = (e^{z_1+z_2} - e^{z_1}e^{z_2})e^{-(z_1+z_2)} = 0$, ce qui implique que

$$e^{z_1+z_2} - e^{z_1}e^{z_2} = 0$$

puisque $e^{-(z_1+z_2)} \neq 0$. □

Formules d'Euler. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Formule de Moivre. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Ces formules sont des conséquences directes des identités

$$\cos x + i\sin x = e^{ix} \qquad \text{et} \qquad \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}.$$

5 Rappel. Somme des termes d'une suite géométrique.

Théorème. *Soit* $a \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*.*

$$\text{Si } a = 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n} a^k = n,$$

$$\text{Si } a \neq 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Preuve. Le cas $a = 1$ est clair. Si $a \neq 1$, montrons par par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que cela soit vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1},$$

donc c'est vrai au rang $n+1$.

On a donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Remarque. Pour "intuiter" la formule, quand $a \neq 1$, il suffit de remarque que, si $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$, alors

$$aS_n = a + a^2 + a^3 \cdots + a^{n-1} + a^n + a^{n+1}$$

et

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n.$$

Faisant la différence de la première égalité et de la seconde, tous les termes disparaissent hormis a^{n+1} dans la première et 1 dans la seconde. Nous obtenons alors

$$(a-1)S_n = aS_n - S_n = a^{n+1} - 1$$

d'où

$$S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Théorème. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in N$. Alors :*

$$\textit{Si } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = n + 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = 0.$$

$$\textit{Si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Preuve. Notons

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin kx.$$

On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, le résultat énoncé est clair.

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ix} \neq 1$, et donc

$$C_n + iS_n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{2i \sin \frac{n+1}{2}x}{2i \sin \frac{x}{2}}.$$

On déduit de cela que

$$C_n = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\right) = \frac{\cos \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \qquad \text{et} \qquad S_n = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\right) = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

6 Fonctions hyperboliques.

Définition. On appelle *sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique* les trois fonctions notées sh, ch et th et définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

On vérifie immédiatement que ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \qquad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \qquad \operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

La fonction ch est paire, les fonctions sh et th sont impaires.

Comme la fonction ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$, on en déduit que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, nulle en 0, que $\lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$, $\lim_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty$.

La fonction ch est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, vaut 1 en 0, et est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $\lim_{\pm\infty} \operatorname{ch} = +\infty$.

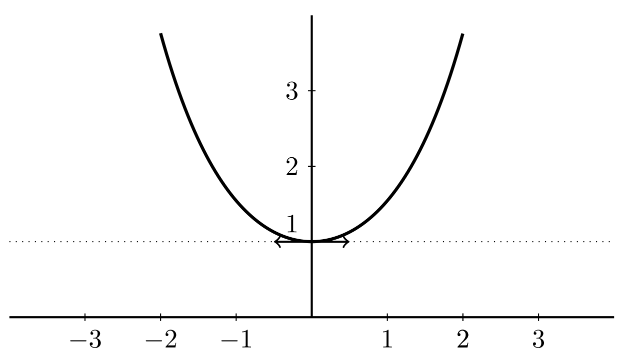
La fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, nulle en 0. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

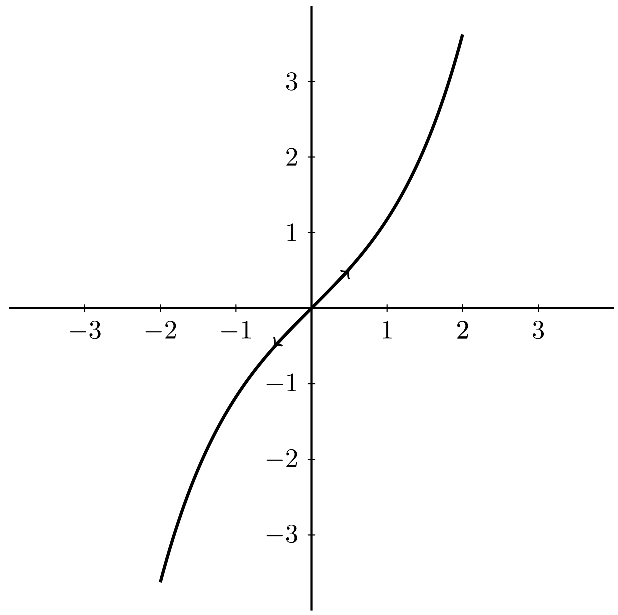
et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

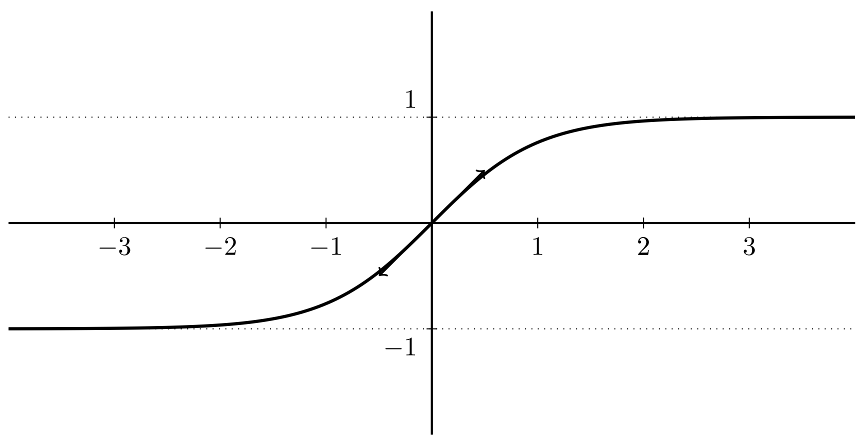
Voici le graphe de ces trois fonctions : - ch



- sh



-th



Formule importante. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

Preuve. En effet, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = (\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x)(\mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x) = \left(\frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2}\right) = \left(e^x\right)\left(e^{-x}\right) = 1.$$

7 Fonctions hyperboliques réciproques.

7.1 La fonction argument sinus hyperbolique.

Définition. La fonction $\varphi : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{sh} x \in \mathbb{R}$ est une bijection continue et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément y de $\mathbb{R}$ il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{sh} x = y$. Cet élément x est appelé l'*argument sinus hyperbolique* de y et on note $x =$arg sh y.

En particulier, on a

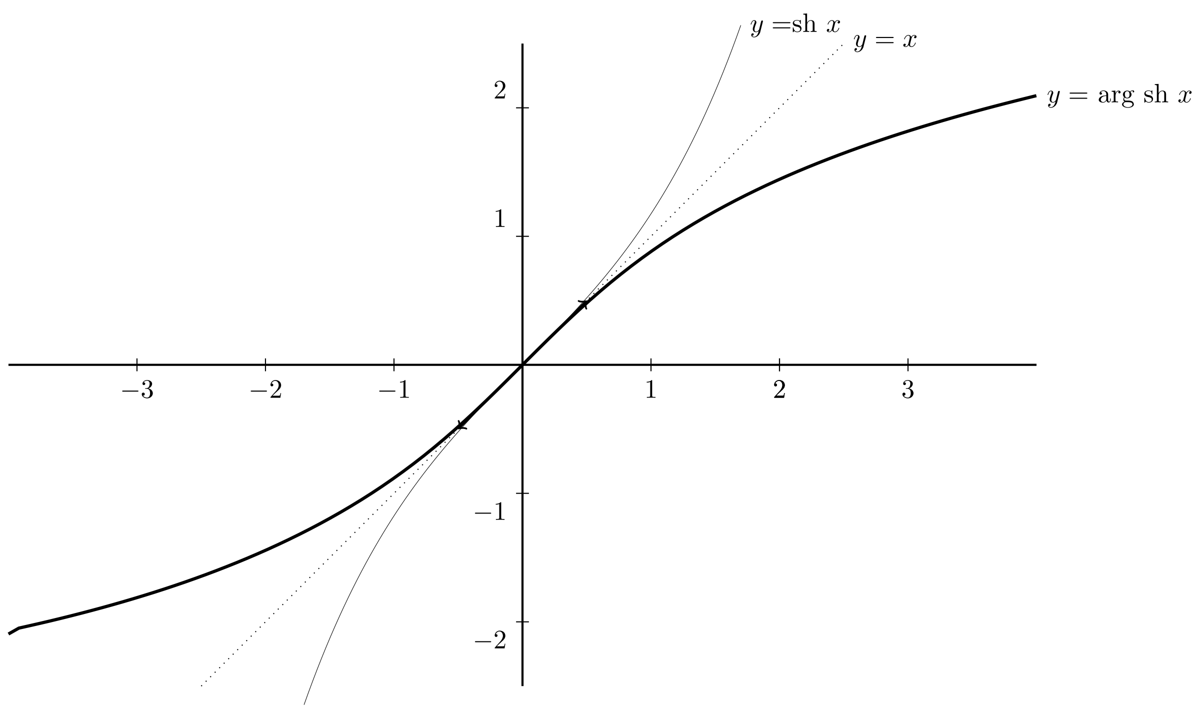
$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh}(\operatorname{arg\,sh} y) = \operatorname{arg\,sh}(\operatorname{sh} y) = y.$$

La fonction sinus hyperbolique étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, on en déduit que $\operatorname{arg\,sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $y \in]-1, 1[$, comme $\operatorname{sh}(\operatorname{arg\,sh} y) = y$, on obtient, en dérivant, $\operatorname{arg\,sh}'(y) \times \operatorname{sh}'(\operatorname{arg\,sh} y) = 1$, soit encore $\operatorname{arg\,sh}'(y) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arg\,sh} y)}$.

Or, pour $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{arg\,sh} y) \geq 1$. Comme $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, on en déduit que, pour $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{arg\,sh} y) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arg\,sh} y)} = \sqrt{1 + y^2}$, donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arg\,sh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

D'où le graphe de la fonction argument sinus hyperbolique (obtenu en prenant l'image du graphe de sh par la symétrie par rapport à la droite $y = x$) :



7.2 La fonction argument cosinus hyperbolique.

Définition. La fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \operatorname{ch} x \in [1, +\infty[$ est une bijection continue et dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.

Pour tout élément y de $[1, +\infty[$ il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\operatorname{ch} x = y$. Cet élément x est appelé l'*argument cosinus hyperbolique* de y et on note $x = \arg \operatorname{ch} y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in [1, +\infty[, \qquad \operatorname{ch}(\arg\operatorname{ch} y) = y$$

et

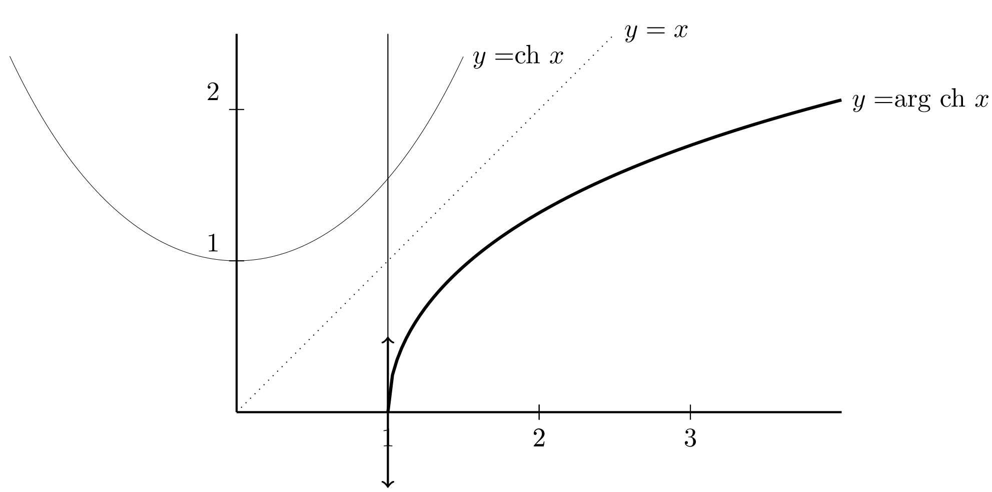
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \arg\operatorname{ch}(\operatorname{ch} x) = y$$

La fonction cosinus hyperbolique étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, hormis en 0, on en déduit que $\arg\operatorname{ch}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ privé de $\psi(0) = 1$, et pour tout $y \in]1, +\infty[$, comme $\operatorname{ch}(\arg\operatorname{ch} y) = y$, on obtient, en dérivant, $\arg\operatorname{ch}'(y) \times \operatorname{ch}'(\arg\operatorname{ch} y) = 1$, soit encore $\arg\operatorname{ch}'(y) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(\arg\operatorname{ch} y)}$.

Or, pour $y \in]1, +\infty[$, $\operatorname{sh}(\arg\operatorname{ch} y) \geq 0$. Comme $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, on en déduit que, pour $y \in]1, +\infty[$, $\operatorname{sh}(\arg\operatorname{ch} y) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\arg\operatorname{sh} y) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$, donc

$$\forall y \in]1, +\infty[, \qquad \arg\operatorname{ch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

D'où le graphe de la fonction argument cosinus hyperbolique :



7.3 Expressions explicites des fonctions hyperboliques réciproques.

Proposition.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arg\,sh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arg\,ch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Preuve. En effet, si y et x dans $\mathbb{R}$ sont tels que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y,$$

en posant $X = e^x$, on a $X - 1/X = 2y$, ce qui équivaut après multiplication par $X > 0$ à

$$X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

La résolution des équations de degré 2 montre que

$$X = y - \sqrt{y^2+1} \qquad \text{ou bien} \qquad X = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Or la première solution est strictement négative car, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y < \sqrt{y^2+1}$. Comme X doit être strictement positif et que la seconde solution l'est car $\sqrt{y^2+1} > -y$, on en déduit que $X = y + \sqrt{y^2+1}$, donc que $x = \ln X = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Ceci achève la preuve du premier point.

Pour le second point, si $y \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}^+$ sont tels que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y,$$

en posant $X = e^x$, on a $X + 1/X = 2y$, ce qui équivaut après multiplication par $X > 0$ à

$$X^2 - 2yX + 1 = 0.$$

La résolution des équations de degré 2 montre qu'on a deux solutions

$$X_1 = y - \sqrt{y^2-1} \qquad \text{ou bien} \qquad X_2 = y + \sqrt{y^2-1}.$$

Supposons $y > 1$. Comme $x > 0$, on en déduit que $X = e^x > 1$. Il faut donc voir laquelle des deux solutions est strictement plus grande que 1.

Or la seconde solution X_2 est, pour $y > 1$, strictement supérieure à 1 car

$$y + \sqrt{y^2-1} \geq y > 1.$$

Comme le produit des deux racines de l'équation $X^2 - 2yX + 1$ vaut 1 (le coefficient constant), on en déduit que $X_1 = 1/X_2 < 1$, donc que $x = \ln X_2 = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.

Ceci achève la preuve du second point.

7.4 Fonction argument tangente hyperbolique.

Définition. La fonction $\theta : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{th} x \in]-1,1[$ est une bijection continue et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Pour tout élément y de $[-1,1[$ il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{th} x = y$. Cet élément x est appelé l'*argument tangente hyperbolique* de y et on note $x = \arg\operatorname{th} y$.

En particulier, on a

$$\forall y \in]-1,1[, \qquad \operatorname{th}(\arg\operatorname{th} y) = y$$

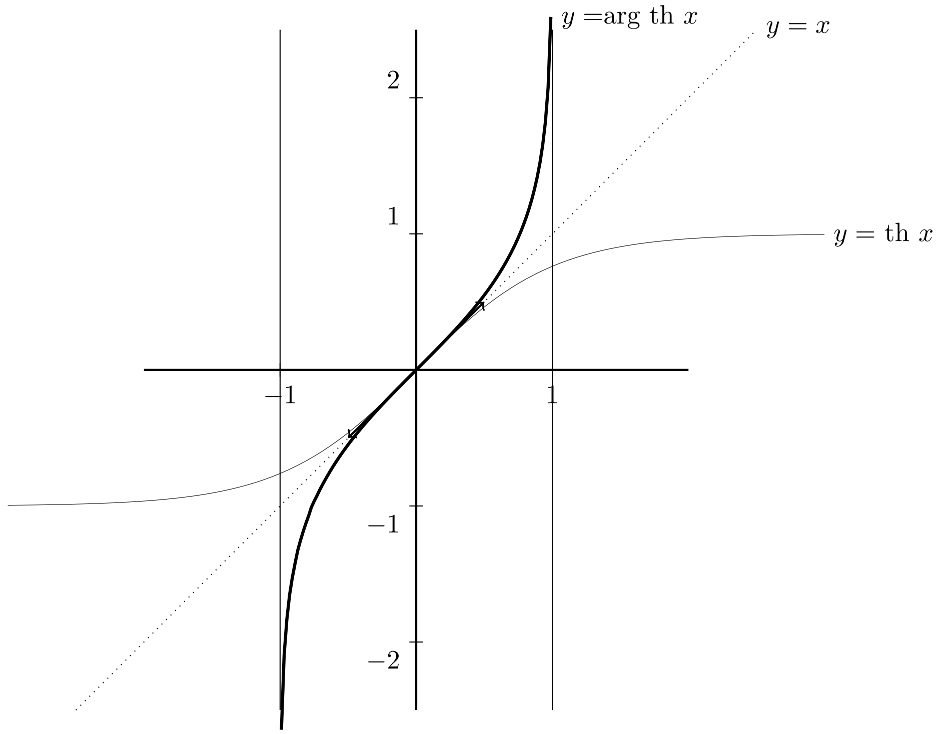
et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arg\operatorname{th}(\operatorname{th} x) = y$$

La fonction tangente hyperbolique étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annulant pas, on en déduit que $\arg\operatorname{th}$ est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $y \in]1,+\infty[$, comme $\operatorname{th}(\arg\operatorname{th} y) = y$, on obtient, en dérivant, $\arg\operatorname{th}'(y) \times \operatorname{th}'(\arg\operatorname{th} y) = 1$, soit encore $\arg\operatorname{th}'(y) = \operatorname{ch}^2(\arg\operatorname{th} y) = \dfrac{\operatorname{ch}^2(\arg\operatorname{th} y)}{\operatorname{ch}^2(\arg\operatorname{th} y) - \operatorname{sh}^2(\arg\operatorname{th} y)} = \dfrac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\arg\operatorname{th} y)} = \dfrac{1}{1-y^2}$. Donc

$$\forall y \in]1,+\infty[, \qquad \arg\operatorname{th}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

D'où le graphe de la fonction argument tangente hyperbolique :



Proposition.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arg\,th} y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$

Preuve. En effet, si y et x dans $\mathbb{R}$ sont tels que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y,$$

en posant $X = e^x$, on a $\dfrac{X - 1/X}{X + 1/X} = y$, ce qui équivaut après multiplication par $X > 0$ en haut et en bas à

$$\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} = y$$

soit encore à

$$X^2 - 1 = yX^2 + y \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2(1-y) = 1 + y \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 = \frac{1+y}{1-y}.$$

Comme $X > 0$, nous obtenons donc

$$X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}},$$

puis

$$x = \ln X = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$

7.5 Formules de duplication.

Nous avons les formules suivantes, valables pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \qquad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \qquad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x.$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

Pour tous réels p et q :

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \qquad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \qquad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}.$$

Formule de Moivre : Pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx \qquad (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx - \operatorname{sh} nx.$$