Université de Provence 2012–2013

Introduction à l'Analyse

CHAPITRE 2 - EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1 Equations Différentielles Linéaires du premier ordre à coefficients constants.

1.1 Equation homogène $y' + ay = 0$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$. On appelle *solution sur I de l'équation $y' + ay = 0$* toute fonction f dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) + af(t) = 0$.

Théorème. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Si f est solution de l'équation $y' + ay = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors il existe une constante C telle que*

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = Ce^{-at}.$$

Preuve. En effet, pour toute constante C, la fonction $f(t) = Ce^{-at}$ est solution sur I de l'équation proposée puisque

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + af(t) = (Ce^{-at})' + aCe^{-at} = -aCe^{-at} + aCe^{-at} = Ce^{-at}(-a + a) = 0.$$

Réciproquement, si f est une fonction dérivable sur I solution de l'équation proposée et si on pose, pour $t \in I$, $\varphi(t) = f(t)e^{at}$, alors φ est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = f'(t)e^{at} + af(t)e^{at} = (f'(t) + af(t))e^{at} = 0 \times e^{at} = 0.$$

On en déduit que la fonction φ est constante sur I. Notons C cette constante. On a donc, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = C$, donc $f(t) = Ce^{-at}$. □

1.2 Equation non homogène $y' + ay = g$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle *solution sur I de l'équation $y' + ay = g$* toute fonction f dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) + af(t) = g(t)$.

Théorème. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Si f_0 est une solution de l'équation $y' + ay = g$, toute solution f de l'équation $y' + ay = g$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme*

$$f = f_0 + \varphi$$

où φ est solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$.

Preuve. En effet, si f_0 est une solution particulière de l'équation non homogène et f une autre solution de cette équation, la fonction $\varphi = f - f_0$ définie et dérivable sur I vérifie

$$\varphi' + a\varphi = (f - f_0)' + a(f - f_0) = (f' + af) - (f_0' + af_0) = g - g = 0.$$

Réciproquement, si f_0 est une solution particulière de l'équation non homogène et φ une solution de l'équation homogène, alors $f = f_0 + \varphi$ est solution de l'équation non homogène puisque

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + af(t) = f_0'(t) + \varphi'(t) + af_0(t) + a\varphi(t) = (f_0'(t) + af_0(t)) + (\varphi'(t) + a\varphi(t)) = g(t) + 0.$$

□

1.3 Equation non homogène avec second membre exponentielle polynôme.

Il s'agit de remarquer que, si dans le cas d'une équation non homogène, la fonction g est une exponentielle polynôme, alors on peut bien souvent trouver une solution particulière (et donc résoudre complètement l'équation) de la même forme.

Recette. *Soit $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et P un polynôme. Alors on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' + ay = P(t)e^{bt}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme*

$$f_0(t) = Q(t)e^{bt}$$

où Q est un polynôme.

Cet énoncé implique par ailleurs l'autre recette (utile) suivante :

Recette. *Soit $a \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A, B, C \in \mathbb{C}$. Alors on peut chercher une solution particulière de l'équation $y' + ay = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + C)e^{\beta t}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme*

$$f_0(t) = (A'\cos\alpha t + B'\sin\alpha t + C')e^{\beta t}$$

où $A', B', C' \in \mathbb{C}$.

1.4 Variation de la constante.

On appelle "Méthode de variation de la constante" la méthode que nous allons exposer destinée à rechercher une solution particulière f_0 de l'équation $y' + ay = g$.

Il s'agit de faire la chose suivante : on sait que les solutions f de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont de la forme $f(t) = Ce^{-at}$ où C est une constante.

On cherche une fonction $f_0(t)$ solution de $y' + ay = g$ de la forme $f_0(t) = \varphi(t)e^{-at}$ où φ est dérivable (la constante C est remplacée par une fonction, d'où le nom "variation de la constante").

On a alors :

$$\forall t \in I, \qquad f_0'(t) + af_0(t) = (\varphi'(t)e^{-at} - \varphi(t)ae^{-at}) + a\varphi(t)e^{-at} = \varphi'(t)e^{-at} = g(t),$$

ce qui nous donne $\varphi'(t) = g(t)e^{at}$. Il suffit alors de trouver une primitive de $g(t)e^{at}$ pour conclure.

2 Equations Différentielles Linéaires du second ordre à coefficients constants.

2.1 Equation homogène.

On s'intéresse dans ce paragraphe aux solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{C}$. On appelle *solution sur I de l'équation $y'' + ay' + by = 0$* toute fonction f dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$.

Théorème. *Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère les solutions complexes r_1 et r_2 de l'équation $r^2 + ar + b = 0$.*
- *Si $r_1 = r_2$, toutes les solutions f de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont de la forme $f(t) = (At + B)e^{r_1 t}$ pour $t \in I$ et où A et B sont deux constantes.*
- *Si $r_1 \neq r_2$, toutes les solutions f de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont de la forme $f(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ pour $t \in I$ et où A et B sont deux constantes.*

Preuve. On cherche les nombres complexes α, β tels que, si on pose $z(t) = f'(t) - \alpha f(t)$ pour tout $t \in I$ et pour f solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$, on ait $z'(t) = \beta z(t)$ pour tout $t \in I$.

Pour cela on écrit que :

$$\forall t \in I, \qquad z'(t) = \beta z(t) \quad \Leftrightarrow \quad f''(t) - \alpha f'(t) = \beta f'(t) - \beta\alpha f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f''(t) - (\alpha + \beta)f'(t) + \alpha\beta f(t) = 0$$

Il faut donc que $\alpha + \beta = -a$ et que $\alpha\beta = b$, soit encore que α et β soient les racines de $r^2 + ar + b = 0$.

Supposons donc que l'équation $r^2 + ar + b = 0$ ait deux racines complexes différentes r_1 et r_2.

Posant $z(t) = f'(t) - r_1 f(t)$ pour tout $t \in I$, on obtient que $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$ pour tout $t \in I$ si et seulement si $z'(t) = r_2 z(t)$ pour tout $t \in I$. On obtient l'existence d'une constante C_1 telle que pour tout $t \in I$, on ait $z(t) = C_1 e^{r_2 t}$.

On a alors, $f'(t) - r_1 f(t) = C_1 e^{r_2 t}$ pour tout $t \in I$. En particulier,

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t})' = (f'(t) - r_1 f(t))e^{-r_1 t} = C_1 e^{(r_2 - r_1)t},$$

donc il existe une constante C_2 telle que

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t}) = \frac{C_1}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t} + C_2,$$

ce qui donne

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = \frac{C_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t} + C_2 e^{r_1 t}.$$

Supposons maintenant que l'équation $r^2 + ar + b = 0$ ait une seule racine complexe r_1.

Posant $z(t) = f'(t) - r_1 f(t)$ pour tout $t \in I$, on obtient que $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$ pour tout $t \in I$ si et seulement si $z'(t) = r_1 z(t)$ pour tout $t \in I$. On obtient l'existence d'une constante C_1 telle que pour tout $t \in I$, on ait $z(t) = C_1 e^{r_1 t}$.

On a alors, $f'(t) - r_1 f(t) = C_1 e^{r_1 t}$ pour tout $t \in I$. En particulier,

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t})' = (f'(t) - r_1 f(t))e^{-r_1 t} = C_1,$$

donc il existe une constante C_2 telle que

$$\forall t \in I, \qquad (f(t)e^{-r_1 t}) = C_1 t + C_2,$$

ce qui donne

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = (C_1 t + C_2)e^{r_1 t}.$$

$\square$

Corollaire. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que le discriminant de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ est strictement négatif, si bien que les deux solutions de cette équation sont des complexes conjugués $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec α et β réels.*

Alors toutes les solutions f de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont de la forme $f(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$ pour $t \in I$ et où A et B sont deux constantes.

Preuve. En effet, d'après le théorème précédent, il existe deux constantes A' et B' telles que

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \qquad f(t) &= A'e^{(\alpha+i\beta)t} + B'e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(A'e^{i\beta t} + B'e^{-i\beta t})\\ &= e^{\alpha t}(A'(\cos\beta t + i\sin\beta t) + B'(\cos\beta t - i\sin\beta t))\\ &= e^{\alpha t}((A'+B')\cos\beta t + i(A'-B')\sin\beta t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)\end{aligned}$$

avec $A = A' + B'$ et $B = i(A' - B')$ $\square$

2.2 Equation non homogène.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle *solution sur I de l'équation non homogène $y'' + ay' + by = g$* toute fonction f deux fois dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) = g(t)$.

Théorème. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b deux nombres complexes et g une fonction continue de I dans $\mathbb{C}$.*

Si f_0 est une solution de l'équation $y'' + ay' + by = g$, toute solution f de l'équation $y'' + ay' + by = g$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme $f(t) = h(t) + f_0(t)$ pour tout $t \in I$ et où h est une solution sur I de $y'' + ay' + by = 0$.

Preuve. En effet, la fonction $h = f - f_0$ définie et dérivable sur I vérifie

$$h'' + ah' + bh = (f - f_0)'' + a(f - f_0)' + b(f - f_0) = f'' + af' + bf - (f_0'' + af_0' + bf_0) = g - g = 0.$$

Réciproquement, si h est solution de $y'' + ay' + by = 0$ et si f_0 vérifie $y'' + ay' + by = g$, alors si $f = f_0 + h$, on a

$$\forall t \in I, \qquad f''(t) + af'(t) + bf(t) = (f_0''(t) + h''(t)) + a(f_0'(t) + h'(t)) + b(f_0(t) + h(t))$$
$$= [f_0''(t) + af_0'(t) + bf_0(t)] + [h''(t) + a(t)h'(t) + b(t)h(t)] = g(t) + 0 = g(t).$$

□

2.3 Equation non homogène avec second membre exponentielle polynôme.

Il s'agit de remarquer que, si dans le cas d'une équation non homogène, la fonction g est une exponentielle polynôme, alors on peut bien souvent trouver une solution particulière (et donc résoudre complètement l'équation) de la même forme.

Recette. *Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ et P un polynôme. Alors on peut chercher une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = P(t)e^{\beta t}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme*

$$f_0(t) = Q(t)e^{\beta t}$$

où Q est un polynôme.

Cet énoncé implique par ailleurs l'autre recette (utile) suivante :

Recette. *Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A, B, C \in \mathbb{C}$. Alors on peut chercher une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t + C)e^{\beta t}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme*

$$f_0(t) = (A' \cos \alpha t + B' \sin \alpha t + C')e^{\beta t}$$

où $A', B', C' \in \mathbb{C}$.

3 Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants.

3.1 $y' + ay = 0$ avec a continue.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction continue de I dans $\mathbb{C}$. On appelle *solution sur I de l'équation $y' + ay = 0$* toute fonction f dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) + a(t)f(t) = 0$.

Théorème. *Soit $a : I \to \mathbb{C}$ continue. Toute solution f de l'équation $y' + ay = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme $f(t) = Ce^{-A(t)}$ pour tout $t \in I$, où A est une primitive de a et où C est une constante.*

Preuve. En effet, pour toute constante C, la fonction $f(t) = Ce^{-A(t)}$ est solution sur I de l'équation proposée.

Réciproquement, si f est une fonction dérivable sur I solution de l'équation proposée et si on pose, pour $t \in I$, $\varphi(t) = f(t)e^{-A(t)}$, alors φ est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = f'(t)e^{-A(t)} + a(t)f(t)e^{-A(t)} = (f'(t) + a(t)f(t))e^{-A(t)} = 0 \times e^{-A(t)} = 0.$$

On en déduit que la fonction φ est constante sur I. Notons C cette constante. On a donc, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = C$, donc $f(t) = Ce^{A(t)}$. $\square$

3.2 $y' + ay = g$ avec a et g continues de I dans $\mathbb{C}$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues. On appelle *solution sur I de l'équation $y' + ay = g$* toute fonction f dérivable sur I telle que, pour tout $t \in I$, $f'(t) + a(t)f(t) = g(t)$.

Théorème. *Soit $a : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues. Si f_0 est une solution de l'équation $y' + ay = g$, toute solution f de l'équation $y' + ay = g$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est de la forme*

$$f(t) = f_0(t) + \varphi(t)$$

pour tout $t \in I$ où φ une solution de l'équation homogène.

Preuve. En effet, si f_0 est une solution particulière de l'équation non homogène et f une autre solution de cette équation, la fonction $\varphi = f - f_0$ définie et dérivable sur I vérifie

$$\varphi' + a\varphi = (f - f_0)' + a(f - f_0) = (f' + af) - (f_0' + af_0) = g - g = 0.$$

Réciproquement, si f_0 est une solution particulière de l'équation non homogène et φ une solution de l'équation homogène, alors $f = f_0 + \varphi$ est solution de l'équation non homogène puisque

$$\forall t \in I, \qquad f'(t) + af(t) = f_0'(t) + \varphi'(t) + af_0(t) + a\varphi(t) = (f_0'(t) + af_0(t)) + (\varphi'(t) + a\varphi(t)) = g(t) + 0.$$

$\square$

3.3 Variation de la constante.

On appelle "Méthode de variation de la constante" la méthode que nous allons exposer destinée à rechercher une solution particulière f_0 de l'équation $y' + ay = g$ précédente.

Il s'agit de faire la chose suivante : on sait que les solutions f de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont de la forme $f(t) = Ce^{-A(t)}$ où C est une constante et où A est une primitive de a.

On cherche une fonction $f_0(t)$ solution de $y' + ay = g$ de la forme $f_0(t) = \varphi(t)e^{-A(t)}$ où φ est dérivable (la constante C est remplacée par une fonction, d'où le nom "variation de la constante").

On a alors :

$$\forall t \in I, \qquad f_0'(t) + af_0(t) = (\varphi'(t)e^{-A(t)} - \varphi(t)a(t)e^{-A(t)}) + a(t)\varphi(t)e^{-A(t)} = \varphi'(t)e^{-A(t)} = g(t),$$

ce qui nous donne $\varphi'(t) = g(t)e^{A(t)}$. Il suffit alors de trouver une primitive de $g(t)e^{A(t)}$ pour conclure.