Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

1. Définitions

1.1. Rappels

★ **1.1.1. Définition.** Soient X un ensemble, (E, d) un espace métrique et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans E .

- On dit que $(f_n)_n$ converge *simplement* (sur X) vers $f : X \rightarrow E$ si et seulement si, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, en d'autres termes si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in X, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

- On dit que $(f_n)_n$ converge *uniformément* (sur X) vers $f : X \rightarrow E$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \geq N, \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

★ **1.1.2. Remarque.**

- *Il est important de saisir complètement la différence entre ces deux notions. Étant donné $\varepsilon > 0$, la valeur de N pour laquelle $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ dépend de x pour la convergence simple, et ne dépend pas de x pour la convergence uniforme.*
- *La convergence uniforme entraîne la convergence simple.*
- *Lorsque les fonctions (f_n) sont à variable et à valeurs réelles, un moyen de se représenter la convergence uniforme de (f_n) vers f est de dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel le graphe de f_n est "coincé" entre le graphe de $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$.*

1.2. Critère de Cauchy uniforme.

★ **1.2.1. Proposition.** Une suite de fonctions d'un ensemble X vers un espace métrique complet (E, d) converge uniformément sur X si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq N, \quad \forall q \geq N, \quad \forall x \in X, \quad d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon.$$

Preuve. Exercice 6.2. $\square$

1.3. Caractérisation de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions.

★ **1.3.1. Définition.** Soit X un ensemble et E un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E , et pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$, la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

★ **1.3.2. Proposition.** Une suite (f_n) de fonctions bornées de X dans E converge uniformément vers $f : X \rightarrow E$ si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{B}(X, E)$ est aussi un espace de Banach.

Preuve. Exercice 6.3. $\square$

1.4. Séries de fonctions, convergence normale.

Comme pour les séries numériques, une série de fonctions $\sum g_n$ est définie comme étant la suite de fonctions (f_n) avec $f_n = g_0 + \dots + g_n$. On va introduire la notion de convergence normale qui est en fait une notion pratique à vérifier et qui entraîne la convergence uniforme.

★ **1.4.1. Définition.** Soient X un ensemble et E un espace de Banach. On dit qu'une série de fonctions $\sum g_n$ à termes dans $\mathcal{B}(X, E)$ converge *normalement* si la série $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.

★ **1.4.2. Théorème.** Une série de fonctions $\sum g_n$ à valeurs dans un espace de Banach qui converge normalement sur un ensemble X converge uniformément sur X .

Preuve. Exercice 6.5. $\square$

★ **1.4.3. Remarque.** De même qu'il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes, il existe des séries de fonctions uniformément convergentes qui ne sont pas normalement convergentes. Nous en verrons un exemple dans l'exercice 6.18.

2. Propriétés des suites de fonctions

2.1. Continuité de la fonction limite.

★ **2.1.1. Théorème.** Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et (f_n) une suite de fonctions de E dans E' . Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur E vers $f : E \rightarrow E'$ et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in E$, alors f est continue en x_0 .

Preuve. Exercice 6.6. □

2.2. Intégration d'une suite de fonctions

★ **2.2.1. Théorème.** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors, f est continue et

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Plus généralement, la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ qui à x associe $\int_a^x f(t) dt$ est limite uniforme de la suite de fonction $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$.

Preuve. Exercice 6.7. □

★ **2.2.2. Corollaire (Interversion des signes de sommation.** Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ qui converge normalement sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b g_n(t) dt \right).$$

Preuve. Exercice 6.8. □

2.3. Dérivabilité et dérivée de la fonction limite

★ **2.3.1. Théorème.** Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 de $[a, b]$ dans un espace de Banach E . On suppose que

- i. Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge ;
- ii. la suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g . Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 et vérifiant $f' = g$.

Preuve. Exercice 6.9. □

★ **2.3.2. Corollaire.** Une suite de fonctions $(f_n)_n$ de classes C^p telle que pour tout $k = 0, 1, \dots, p$, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers une fonction g_k , converge uniformément vers une fonction f de classe C^p qui vérifie $f^{(k)} = g_k$ pour $k = 0, 1, \dots, p$.

Preuve. Exercice 6.10. □

3. Théorèmes de Weierstraß et de Stone–Weierstraß.

3.1. Théorème de Weierstraß.

Le théorème suivant, obtenu par Weierstraß, stupéfia ses contemporains :

★ **3.1.1. Théorème.** *Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[a, b]$.*

Nous verrons une preuve dans l'exercice 6.24 basée sur les polynômes de Bernstein. Il existe un résultat analogue pour les fonctions continues périodiques (préliminaire aux séries de Fourier) :

★ **3.1.2. Théorème.** *Toute fonction continue et 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.*

On rappelle qu'un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Ces deux résultats sont une conséquence du résultat plus fort, démontré dans le paragraphe suivant, et qui est le théorème de Stone–Weierstraß.

3.2. Théorème de Stone–Weierstraß.

Nous allons ici établir plusieurs théorèmes qui nous montreront que si une famille de fonctions continues sur un espace compact est assez riche et est stable par certaines opérations, elle permet d'approximer uniformément toute fonction continue sur l'espace compact.

Soit (E, d) un espace métrique compact, $C(E, \mathbb{R})$ l'algèbre des applications continues de E dans $\mathbb{R}$, munie de la topologie de la convergence uniforme.

3.2.1. Définition. On dit qu'une partie A de $C(E, \mathbb{R})$ est *réticulée* si pour tous $f, g \in A$, les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ appartiennent aussi à A .

3.2.2. Lemme. *Soit A une partie réticulée de $C(E, \mathbb{R})$. Dire qu'une fonction $f \in C(E, \mathbb{R})$ appartient à la fermeture $\overline{A}$ de A équivaut à dire que,*

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists g \in A, \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Pour bien marquer que cette fonction g dépend de x et de y , on la notera $g_{x,y}$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Avec la notation adoptée, on a :

$$|f(x) - g_{x,y}(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(y) - g_{x,y}(y)| < \varepsilon.$$

Posons $\omega_{x,y} = \{z : g_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Comme la fonction $(g_{x,y} - f)$ est continue, l'ensemble $\omega_{x,y}$ est ouvert et il contient y . Donc, pour tout x fixé, les $\omega_{x,y}$ constituent un recouvrement ouvert de X ; on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini (ω_{x,y_i}) .

Posons $g_x = \inf_i (g_{x,y_i})$. On a $g_x < f + \varepsilon$ dans E : en effet, si $y \in E$, alors il existe $i \in I$ tel que $y \in \omega_{x,y_i}$, et donc $g_x(y) \leq g_{x,y_i}(y) < f(y) + \varepsilon$.

On a aussi $g_x(x) > f(x) - \varepsilon$: en effet, pour tout i , $g_{x,y_i} > f(x) - \varepsilon$, et donc comme les g_{x,y_i} sont en nombre fini, on obtient que $g_x(x) > f(x) - \varepsilon$.

Posons $\omega_x = \{z, g_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$. La fonction g_x est continue. En effet, g_x est le minimum d'un nombre fini de fonctions continues, et ce minimum est donc une fonction continue car le minimum de deux fonctions continues est une fonction continue ($\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$). Comme la fonction $g_x - f$ est continue, l'ensemble ω_x est ouvert et il contient x . Les ω_x constituent donc un recouvrement ouvert de E , on peut donc en extraire un recouvrement fini ω_{x_j} .

Posons $g = \sup_j g_{x_j}$. On a $g \in A$, et $g < f + \varepsilon$ car $g_x < f + \varepsilon$ dans E .

On a aussi $g > f - \varepsilon$ dans E . En effet, si $x \in E$, il existe i tel que $x \in \omega_{x_i}$ et donc $g(x) \geq g_{x_i}(x) > f(x) - \varepsilon$.

On a donc bien trouvé une fonction $g \in A$ qui approxime f à ε près. $\square$

3.2.3. Exemple. Soit E un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et soit A l'ensemble des fonctions continues f sur E qui sont affines par morceaux (c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement fini de E par des intervalles dans chacun desquels f est affine). Cet ensemble A est évidemment réticulé, et pour tous x, y il existe des $f \in A$ qui prennent en x et y des valeurs données quelconques. Donc

$$\overline{A} = C(E, \mathbb{R}).$$

3.2.4. Lemme. Toute sous-algèbre fermée A de $C(E, \mathbb{R})$ est réticulée.

Preuve. En vertu des relations :

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}[(f + g) + |f - g|] \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}[(f + g) - |f - g|],$$

il suffit de montrer que si $f \in A$, on a aussi $|f| \in A$.

On va montrer pour cela que $|f|$ est limite uniforme de polynômes en f de la forme $\sum_1^n a_p f^p$. Quitte à diviser f par $\|f\|_\infty$, on peut supposer que $\|f\|_\infty \leq 1$.

D'après l'exercice 6.22, la fonction $\sqrt{t}$ est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes $P_n(t)$ et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |\sqrt{t} - P_n(t)| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow \sup ||f| - P_n(f^2)| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme 3.2.4. $\square$

3.2.5. Définition. Soit A un ensemble d'applications d'un ensemble E dans un ensemble F . On dit que A *sépare* les points de E si pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Par exemple, si E est un espace métrique, $C(E, \mathbb{R})$ sépare les points de E puisque, si $a, b \in E$ avec $a \neq b$, la fonction continue $x \mapsto d(a, x)$ sépare a et b . Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental cherché :

★ **3.2.6. Théorème de Stone–Weierstraß.** Soit A une sous-algèbre de $C(E, \mathbb{R})$ telle que :

- i. A sépare les points de X
- ii. pour tout $x \in E$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$. Alors $\overline{A} = C(E, \mathbb{R})$.

Preuve. montrons tout d'abord que pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$ et pour tous scalaires α, β , il existe $f \in \overline{A}$ avec $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$. il suffit évidemment de le montrer pour A :

S'il existe $g \in A$ avec $g(x) \neq g(y)$ et $g(x), g(y) \neq 0$, on posera $f = a_1g + a_2g^2$. L'existence de scalaires a_1, a_2 tels que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$ se traduit par la condition :

$$g(x)g^2(y) - g(y)g^2(x) = g(x)g(y)(g(y) - g(x)) \neq 0$$

qui est vérifiée par hypothèse.

Or il existe un tel g ; car il existe g_1 tel que $g_1(x) \neq g_1(y)$; si $g_1(x)$ et $g_1(y) \neq 0$, on prend $g = g_1$, si par contre $g_1(x) = 0$ par exemple, il existe g_2 tel que $g_2(x) \neq 0$ et on prend $g = g_1 + \varepsilon g_2$ avec $\varepsilon \neq 0$ assez petit pour qu'on ait encore $g(x) \neq g(y)$ et $g(y) \neq 0$.

A étant une algèbre, $\overline{A}$ est aussi une algèbre, car si $f, g \in \overline{A}$, avec $f = \lim f_n$, $g = \lim g_n$ avec $f_n, g_n \in A$, on a :

$$f + g = \lim(f_n + g_n), \quad \lambda f = \lim \lambda f_n, \quad fg = \lim f_n g_n,$$

donc $(f + g)$, λf et fg appartiennent aussi à $\overline{A}$.

Il reste à vérifier que si A est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ qui vérifie les conditions i. et ii. du théorème 3.2.6, alors $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$. Tout d'abord, $\overline{A}$ est fermée donc réticulée d'après le lemme 3.2.4. Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$. Pour montrer que $f \in \overline{A}$, il suffit d'après le lemme 3.2.2. de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous $x, y \in E$, il existe $g \in A$ telle que

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Or d'après ce qu'on a vu précédemment, il existe $g \in A$ tel que $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. On a donc $f \in \overline{A}$. □

★ **3.2.7. Remarques.**

1. Il est commode dans les applications de formuler ainsi ce théorème : Si une famille (f_i) d'éléments de $C(E, \mathbb{R})$ sépare les points de E et si les f_i ne s'annulent pas tous en un même point de E , toute fonction $f \in C(E, \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes (sans terme constant) par rapport aux f_i .

2. Si A contient les constantes, la condition *ii.* du théorème 3.2.6 est satisfaite.

★ **3.2.8. Corollaire.** Soit A une sous-algèbre sur le corps $\mathbb{C}$ de $C(E, \mathbb{C})$ telle que

- i.* A sépare les points de E .
- ii.* Pour tout $x \in E$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$.
- iii.* Pour tout $f \in A$, on a aussi $\overline{f} \in A$ (où $\overline{f}$ désigne la conjuguée de f). Alors $\overline{\overline{A}} = C(E, \mathbb{C})$.

Preuve. En effet, la sous-algèbre A_r sur $\mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles de A vérifie les conditions *i.* et *ii.* du théorème 3.2.6 car si f sépare x et y , il en est de même de $\operatorname{Re} f$ ou de $\operatorname{Im} f$ (qui appartiennent à A car $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ et $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$). Et si $f(x) \neq 0$, il en est de même pour $\operatorname{Re} f(x)$ ou $\operatorname{Im} f(x)$. Donc $\overline{A_r} = C(E, \mathbb{R})$ et donc $\overline{A_r + iA_r} = C(E, \mathbb{C})$. □

3.2.9. Remarque. La condition *iii.* de ce corollaire est essentielle. Prenons en effet pour E le disque unité de $\mathbb{C}$, et soit A l'ensemble des polynômes de la variable complexe z . L'algèbre A vérifie les conditions *i.*, *ii.* mais pas *iii.* On vérifie que $\overline{A} \neq C(E, \mathbb{C})$: si $f \in A$, alors

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt.$$

En particulier, cette identité est valable quel que soit $f \in \overline{A}$. Cependant, cette égalité n'est pas valable quel que soit $f \in C(E, \mathbb{C})$. Si, par exemple $f(z) = |z|$, cette identité est fautive.

Exercices.

Exercices d'apprentissage.

Exercice 6.1. Montrez que la suite de fonctions $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^n converge simplement vers 0 sur $[0, 1[$, mais pas uniformément. Montrez que, par contre, elle converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a < 1$. Ce phénomène est courant. Les intervalles où il y a convergence uniforme sont souvent différents de ceux où il y a convergence simple.

Exercice 6.2. Montrez la proposition 1.2.1.

Exercice 6.3. Montrez la proposition 1.3.2.

Exercice 6.4. Montrez que la série de fonctions $\sum g_n$ définie par $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^n/n^2 converge normalement sur $[0, 1]$

Exercice 6.5. Montrez le théorème 1.4.2.

Exercice 6.6. Montrez le théorème 2.1.1.

Exercice 6.7. Montrez le théorème 2.2.1.

Exercice 6.8. Montrez le corollaire 2.2.2.

Exercice 6.9. Montrez le théorème 2.3.1.

Exercice 6.10. Montrez le corollaire 2.3.2.

Exercices d'approfondissement.

Exercice 6.11. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = (1 - x)x^n$, $h_n(x) = n(1 - x)x^n$ et $k_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^n\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x^n\right)$. A défaut de convergence uniforme sur $[0, 1]$, étudier celle-ci sur $[0, a]$, $a < 1$.

Exercice 6.12.

1. Montrer que la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ si $x \in [0, n]$, $f_n(x) = 0$ si $x > n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto e^{-x}$.
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers $z \mapsto e^z$.

Exercice 6.13. Etudier la convergence sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions

$$f_n(x) = nxe^{-nx} \sin x.$$

Exercice 6.14.

1. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], E)$ et (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}([a, b], E)$. On suppose que f_n converge uniformément sur $]a, b[$ vers f . Montrer que f_n converge uniformément sur $[a, b]$. Si E est complet, montrer que c'est vrai sans supposer f continue.
2. Soit P_n une suite de polynômes de degrés $\leq m$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrez que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à m . Est-ce vrai si on retire l'hypothèse portant sur le degré des polynômes ?

Exercice 6.15. Montrez que sur $\mathbb{R}_n[X]$, la topologie de la convergence simple et uniforme coïncident sur $[0, 1]$.

Exercice 6.16. *Théorèmes de Dini.*

1. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I alors la convergence est uniforme. On pourra considérer $\{x \in [a, b], 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$. Est-ce vrai si on supprime l'hypothèse de continuité portant sur f ?
2. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I , montrer que la convergence est uniforme. Est-ce vrai si on supprime l'hypothèse

de continuité portant sur f ? On pourra considérer une subdivision de $[a, b]$ de pas suffisamment petit et utiliser la croissance des f_n .

Exercice 6.17. *Version faible du théorème d'Ascoli.* Soit (f_n) une suite de fonctions M -lipschitziennes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ où M est indépendant de n . Montrez que si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f , alors la convergence est uniforme. On pourra raisonner comme dans la question 2 de l'exercice précédent.

Exercice 6.18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application

$$u_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue f mais que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, mais que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6.19. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles C^1 convergeant simplement vers f sur $[a, b]$. On suppose de plus que les moyennes de Césaro de f'_n convergent uniformément vers une fonction g . Montrer que f est dérivable de dérivée g .

Exercice 6.20. *Théorèmes d'approximations classiques.*

1. Soit X une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Montrez que toute fonction $f \in C(X, \mathbb{C})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes à n variables et à coefficients complexes.
2. Montrez que toute fonction $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques $\sum_{-n}^n a_p e^{ipt}$.
3. Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Montrez que toute fonction $f \in C(X \times Y, \mathbb{C})$ est limite uniforme de fonctions de la forme

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y),$$

avec $g_i \in C(X, \mathbb{C})$ et $h_i \in C(Y, \mathbb{C})$.

4. Montrez que toute fonction f continue sur $[1, +\infty[$ et ayant une limite finie est limite uniforme d'une suite de fonctions de la forme $\sum_{p=0}^n a_p e^{-pt}$.

Exercice 6.21. *Prolongement d'applications continues.*

On se propose de montrer que si Y est une partie fermée d'un espace métrique compact X , alors toute fonction $f \in C(Y, \mathbb{R})$ est la restriction à Y d'un élément de $C(X, \mathbb{R})$.

1. Montrez que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in C(X, \mathbb{R})$ telle que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$ sur Y .
2. Posons $g_\varepsilon = \sup(\alpha, \inf(\beta, f_\varepsilon))$ où α et β désignent les bornes inférieures et supérieures de f sur Y . Montrez que g_ε a les mêmes bornes que f et vérifie $|f - g_\varepsilon| < \varepsilon$ sur Y . On appellera régularisée d'ordre ε de f la fonction g_ε ainsi construite, et on la notera f_ε .
3. On définit par récurrence la suite $h_n \in C(X, \mathbb{R})$ telle que

$$h_1 = f_{\frac{1}{2}}; \quad h_n = \left(f - \sum_{k=1}^{n-1} h_k \right)_{\frac{1}{2^n}}$$

avec les notations précédentes. Montrez que

$$\left| f(y) - \sum_{k=1}^n h_k(y) \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{sur } Y \quad |h_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{sur } X \quad \text{pour } n > 1.$$

Conclure.

Exercice 6.22.

Soit $P_n(t)$ la suite de polynômes définie par la relation de récurrence :

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2} (t - P_n^2(t)) \quad \text{et } P_1(t) = 0.$$

Montrez que la suite (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{t}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 6.23. Soit E un espace compact et soit $f_1, \dots, f_n$ une famille d'éléments de $C(X, \mathbb{R})$ qui sépare les points de E . Montrez que E est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6.24. *Polynômes de Bernstein.*

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$. pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme B_n de degré n par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

où les C_n^k sont les coefficients du binôme.

1. Calculer les polynômes

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k x^k y^{n-k}.$$

2. On pose $r_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Calculer les polynômes

$$\sum_{k=0}^n r_k(x), \quad \sum_{k=0}^n k r_k(x), \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) r_k(x).$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

3. En déduire que la suite de polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Corrigé des exercices d'apprentissage.

Exercice 6.1. Pour tout $x \in [0, 1[$, $\lim_n f_n(x) = 0$. Cependant $\sup_{[0,1[} f_n = 1$ donc (f_n) converge simplement vers 0 mais pas uniformément vers 0. Par contre, $\sup_{[0,a]} f_n = a^n$ tend vers 0 donc il y a convergence uniforme de (f_n) vers 0 sur tout intervalle de la forme $[0, a]$.

Exercice 6.2. On renvoie au théorème 2.3 du chapitre 2.

Exercice 6.3. On renvoie à la proposition 1.1.8 du chapitre 3.

Exercice 6.4. $\|g_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum g_n$ converge normalement.

Exercice 6.5. En effet, il suffit de montrer que la suite $\left(\sum_{n=0}^N g_n\right)_N$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Or, si $M > N$, alors

$$\left\| \sum_{n=0}^N g_n - \sum_{n=0}^M g_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^M \|g_n\|_\infty$$

qui tend vers 0 quand N et M tendent vers $+\infty$.

Exercice 6.6. On renvoie au théorème 2.4 du chapitre 2.

Exercice 6.7. Il suffit de montrer que la suite de fonctions (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$. Or, pour $x \in [a, b]$,

$$\left| \int_a^x (f(t) - f_n(t)) dt \right| \leq \int_a^b \|f - f_n\|_\infty dt = (b - a) \|f - f_n\|_\infty,$$

donc

$$\sup_{[a,b]} |F_n - F| \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 6.8. La suite de fonctions $(G_N)_N$ définie par

$$G_N = \sum_{n=0}^N g_n$$

converge uniformément vers $G = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$. Donc

$$\int_a^b G(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^b G_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\int_a^b g_n(t) dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b g_n(t) dt \right)$$

Exercice 6.9. Il suffit d'écrire $f_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0)$. D'après le théorème 2.2.1, la suite $f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + f(x_0)$ ce qui montre que g est C^1 et que $f' = g$.

Exercice 6.10. Se montre par récurrence sur p . On renvoie à la solution de l'exercice 3.12 du chapitre 3.

Indications pour les exercices d'approfondissement.

Exercice 6.14.

2. Soient $(x_0, \dots, x_m)$ des points distincts. On définit la famille de polynomes

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j \neq i} (X - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

pour $i = 0, \dots, m$ (Polynômes d'interpolation de Lagrange). Ces polynômes vérifient $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ et $L_i(x_i) = 1$. Montrez que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m , on a

$$P(X) = \sum_{i=0}^m P(x_i) L_i(X).$$