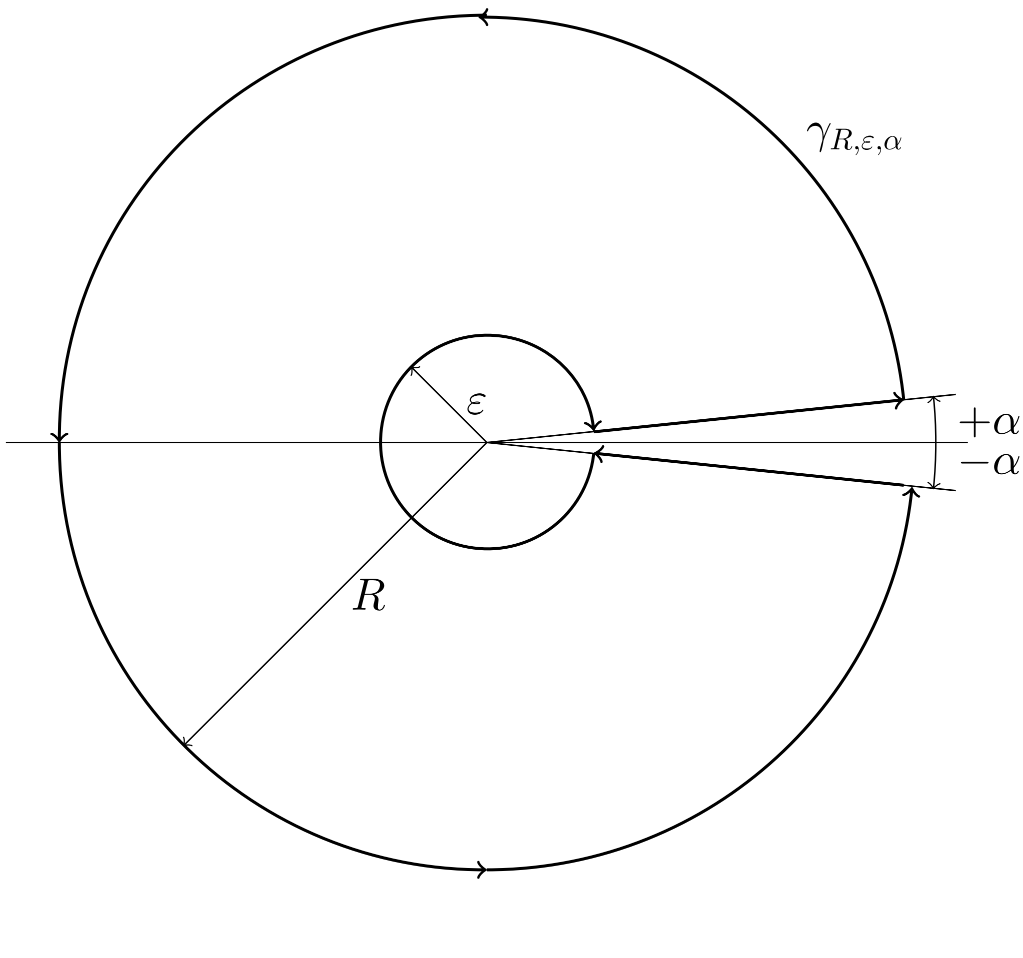
Agrégation de Mathématiques **2011-2012**
CMI **Université d'Aix-Marseille**

Analyse à une variable complexe.

Calcul de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} \qquad \text{pour } 0 < \lambda < 1.$$

par les méthodes des résidus sur le contour suivant :



On prend $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $R > 1$ et le chemin $\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}$ ci-dessus.
On considère la fonction Ln, détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Ln est définie par le fait que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$, et on pose donc $\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\theta$.
On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{(\lambda-1)\,\mathrm{Ln}\, z}}{1+z}$$

définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{-1\})$. Elle a un pôle simple en -1 et son résidu en ce point est

$$\lim_{z\to-1} F(z)(z+1) = \lim_{z\to-1} e^{(\lambda-1)\,\mathrm{Ln}\, z} = e^{(\lambda-1)\,\mathrm{Ln}\,(-1)} =$$
$$= e^{i\pi(\lambda-1)} = -e^{i\pi\lambda}.$$

L'intégrale de la fonction f sur le contour $\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}$ est donc égale à $2\pi i$ fois le résidu de f en -1, donc :

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}} f(z)dz = -2\pi i e^{i\pi\lambda}.$$

On paramétrise les différentes portions du chemin $\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}$ et on obtient

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon,\alpha}} f(z)dz = \underbrace{\int_{t=\varepsilon}^{R} f(te^{i\alpha})e^{i\alpha}dt}_{(1)_{R,\varepsilon,\alpha}} + \underbrace{\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta}_{(2)_{R,\alpha}}$$

$$- \underbrace{\int_{t=\varepsilon}^{R} f(te^{i(2\pi-\alpha)})e^{i(2\pi-\alpha)}dt}_{(3)_{R,\varepsilon,\alpha}} - \underbrace{\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta}d\theta}_{(4)_{\varepsilon,\alpha}} . \qquad (*)$$

R et ε étant fixés, on va d'abord faire tendre α vers $0+$.

Regardons le terme $(1)_{R,\varepsilon,\alpha}$ quand $\alpha \to 0+$.
Nous avons

$$(1)_{R,\varepsilon,\alpha} = \int_{t=\varepsilon}^{R} \frac{e^{(\lambda-1)\,\mathrm{Ln}\,(te^{i\alpha})}}{1+te^{i\alpha}} e^{i\alpha}dt = \int_{t=\varepsilon}^{R} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln t + i\alpha)}}{1+te^{i\alpha}} e^{i\alpha}dt.$$

La famille de fonctions

$$g_\alpha : [\varepsilon, R] \ni t \mapsto \frac{e^{(\lambda-1)(\ln t+i\alpha)}}{1+te^{i\alpha}} e^{i\alpha}$$

tend simplement, lorsque $\alpha \to 0+$ vers

$$[\varepsilon, R] \ni t \mapsto \frac{e^{(\lambda-1)\ln t}}{1+t} = \frac{t^{\lambda-1}}{1+t}.$$

Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il faut majorer les fonctions g_α par une fonction indépendante de α et dans $L^1[\varepsilon, R]$.
On remarque que, comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, le segment de droite $[\varepsilon e^{i\alpha}, Re^{i\alpha}]$ est dans le demi-plan $\{z,\ \mathrm{Re}\ z \geq 0\}$. Comme la distance de -1 à ce demi-plan est égale à 1, on en déduit que

$$\forall t \in [\varepsilon, R], \qquad |1 + te^{i\alpha}| \geq 1,$$

donc que

$$\forall t \in [\varepsilon, R], \qquad \left| \frac{e^{(\lambda-1)(\ln t + i\alpha)}}{1+te^{i\alpha}} e^{i\alpha} \right| \leq \left| e^{(\lambda-1)(\ln t + i\alpha)} \right|$$
$$= e^{(\lambda-1)\ln t} = t^{\lambda-1} \in L^1[\varepsilon, R].$$

Le théorème de convergence dominée nous donne donc

$$\lim_{\alpha \to 0+} (1)_{R,\varepsilon,\alpha} = (1)_{R,\varepsilon} = \int_\varepsilon^R \frac{t^{\lambda-1}dt}{1+t}.$$

Pour le terme $(3)_{R,\varepsilon,\alpha}$, on remarque que la famille de fonctions

$$g_{2\pi-\alpha} : [\varepsilon, R] \ni t \mapsto \frac{e^{(\lambda-1)\,\mathrm{Ln}\,(te^{i(2\pi-\alpha)})}}{1+te^{i(2\pi-\alpha)}} e^{i(2\pi-\alpha)} =$$
$$= \frac{e^{(\lambda-1)(\ln t + i(2\pi-\alpha))}}{1+te^{-i\alpha}} e^{-i\alpha}$$

converge simplement quand $\alpha \to 0+$ vers

$$[\varepsilon, R] \ni t \mapsto \frac{e^{(\lambda-1)(\ln t + 2\pi i)}}{1+t} = \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} e^{2\pi i\lambda}.$$

Là encore, pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\forall t \in [\varepsilon, R], \qquad |g_{2\pi-\alpha}(t)| \leq t^{\lambda-1} \in L^1[\varepsilon, R].$$

Donc

$$\lim_{\alpha \to 0+} (3)_{R,\varepsilon,\alpha} = (3)_{R,\varepsilon} = e^{2\pi i\lambda} \int_\varepsilon^R \frac{t^{\lambda-1}dt}{1+t}.$$

Regardons maintenant la limite de $(2)_{R,\alpha}$ quand $\alpha \to 0+$.
Nous avons

$$\begin{aligned}(2)_{R,\alpha} = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \frac{e^{(\lambda-1)\,\mathrm{Ln}\,(Re^{i\theta})}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \\ = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln R+i\theta)}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \\ \underset{\alpha\to 0+}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln R+i\theta)}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta\end{aligned}$$

car la fonction $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto \frac{e^{(\lambda-1)(\ln R+i\theta)}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}$ est continue.
On note

$$(2)_R = \int_0^{2\pi} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln R+i\theta)}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta.$$

De même, quand $\alpha \to 0+$, nous obtenons

$$(4)_{\varepsilon,\alpha} \underset{\alpha\to 0+}{\longrightarrow} (4)_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln \varepsilon+i\theta)}}{1+\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon ie^{i\theta} d\theta.$$

Faisant donc tendre α vers $0+$ dans $(*)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}-2\pi ie^{i\pi\lambda} = \underbrace{\int_\varepsilon^R \frac{t^{\lambda-1}dt}{1+t}}_{(1)_{R,\varepsilon}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln R+i\theta)}}{1+Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta}_{(2)_R} \\ - \underbrace{e^{2\pi i\lambda} \int_\varepsilon^R \frac{t^{\lambda-1}dt}{1+t}}_{(3)_{R,\varepsilon}} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln \varepsilon+i\theta)}}{1+\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon ie^{i\theta} d\theta}_{(4)_\varepsilon}. \qquad (**)\end{aligned}$$

Faisant maintenant tendre R vers $+\infty$ et ε vers $0+$, nous obtenons que

$$(1)_{R,\varepsilon} - (3)_{R,\varepsilon} \underset{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0+}}{\longrightarrow} (1 - e^{2\pi i\lambda}) \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt.$$

Pour le terme $(2)_R$, nous avons

$$\begin{aligned} |(2)_R| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln R + i\theta)}}{1 + Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{(\lambda-1)(\ln R + i\theta)}}{1 + Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{\lambda-1}}{R-1} R d\theta \\ &= 2\pi \frac{R^\lambda}{R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

car $\lambda < 1$ et car pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $R > 1$, nous avons

$$\left|1 + Re^{i\theta}\right| \geq \left|\left|Re^{i\theta}\right| - 1\right| = |R - 1| = R - 1.$$

Pour le terme $(4)_\varepsilon$, nous avons

$$\begin{aligned} |(4)_\varepsilon| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{(\lambda-1)(\ln \varepsilon + i\theta)}}{1 + \varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon ie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{(\lambda-1)(\ln \varepsilon + i\theta)}}{1 + \varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon ie^{i\theta} \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^{\lambda-1}}{1-\varepsilon} \varepsilon d\theta \\ &= 2\pi \frac{\varepsilon^\lambda}{1-\varepsilon} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

car $\lambda > 0$ et car pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $\varepsilon < \frac{1}{2}$, nous avons

$$\left|1 + \varepsilon e^{i\theta}\right| \geq \left|\left|\varepsilon e^{i\theta}\right| - 1\right| = |\varepsilon - 1| = 1 - \varepsilon.$$

Faisant tendre ε vers $0+$ et R vers $+\infty$ dans $(**)$, nous obtenons donc

$$-2\pi i e^{i\pi\lambda} = (1 - e^{2\pi i\lambda}) \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt,$$

ce qui implique que

$$\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{1+t} dt = -2\pi i \frac{e^{i\pi\lambda}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} = -\frac{2\pi i}{e^{-i\pi\lambda} - e^{i\pi\lambda}}$$

$$= \frac{-2\pi i}{-2i \sin \pi\lambda} = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}.$$

Comme conséquence de cela, nous avons, pour tout $\alpha > 1$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}.$$

En effet, si on pose $u = x^\alpha$ alors $x = u^{1/\alpha}$ donc $dx = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$.
On obtient donc

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1} du}{1 + u} = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}.$$