

Théorème des fonctions implicites. Soient $n, m \geq 1$. Les éléments de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sont les éléments de la forme (x, y) avec $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$ de classe C^1 . Soit $(a, b) \in U$. On suppose que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{R}).$$

Alors il existe A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a , B un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant b , C un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant $f(a, b)$ et $\varphi : A \times C \rightarrow B$ de classe C^1 telle que, pour tout $x \in A$ et pour tout $z \in C$, il existe une solution unique $y \in B$ de $f(x, y) = z$ et cette solution est $y = \varphi(x, z)$.

Preuve. On pose $F : U \ni (x, y) \mapsto (x, f(x, y)) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. La matrice jacobienne de F en (a, b) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a, b) & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a, b) & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a, b) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(a, b) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix} \in GL_{n+m}(\mathbb{R}).$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe donc un ouvert $U' \subset U$ contenant (a, b) tel que $F : U' \rightarrow F(U')$ soit un C^1 -difféomorphisme.

$F(U')$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ contenant (a, c) . Donc il existe deux ouverts $A \subset \mathbb{R}^n$ et $C \subset \mathbb{R}^m$ tels que $(a, c) \subset A \times C \subset F(U')$.

F est encore un C^1 -difféomorphisme de $F^{-1}(A \times C) \rightarrow A \times C$.

Notons $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x, y) \mapsto y \in \mathbb{R}^m$. π est une application C^∞ , ouverte. En particulier, $B = \pi(F^{-1}(A \times C))$ est un ouvert contenant $\pi(F^{-1}(a, c)) = \pi(a, b) = b$.

Si maintenant $x \in A$ et $z \in C$, le point $y = \pi(F^{-1}(x, z))$ est dans B . De plus, $(x, z) \in A \times C \subset F(U')$ ce qui donne que $(x, y) = F^{-1}(x, z) \in U'$. On a alors $F(x, y) = (x, f(x, y)) = (x, z)$ donc $f(x, y) = z$.

S'il existe un autre point $y' \in B$ tel que $f(x, y') = z$ alors $F(x, y') = (x, z) \in F(U')$. Comme F est un C^1 -difféomorphisme de U' sur $F(U')$, F est injective, et donc $y = y'$. On a donc bien prouvé l'existence et l'unicité de $y \in B$.

De plus, on a $y = \pi(F^{-1}(x, z))$ ce qui nous donne que $\varphi = \pi \circ F^{-1}$ est de classe C^1 .

Solution du problème suivant : Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$ où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^1 telle que ∇g ne s'annule pas sur Γ . Si on suppose que Γ est le bord d'un ouvert convexe U , alors pour tout point $A \in \Gamma$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une trajectoire de boule dans U à n rebonds sur Γ partant de A et se terminant en A .

Preuve. L'idée est de prendre un polygône ayant $n + 1$ côtés, dont un sommet est A et dont le périmètre est maximal. Notant $A = M_0 = M_{n+1}$, on cherche donc à maximiser la fonction

$$f : \Gamma^n \ni (M_1, \dots, M_n) \mapsto \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1} \in \mathbb{R}.$$

C'est une fonction continue sur un compact, donc elle atteint son maximum en un n -uplet $(M_1^0, \dots, M_n^0)$.

Remarquons que ce n -uplet vérifie $M_i^0 \neq M_{i+1}^0$ pour tout $i = 0, \dots, n$. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe deux points M_i^0 et M_{i+1}^0 égaux. Si $i > 0$, prenons un point $M_i^{0'}$ différent de M_i^0 . Il est alors clair que $M_{i-1}^0 M_i^{0'} + M_i^{0'} M_{i+1}^0 > M_{i-1}^0 M_i^0 + M_i^0 M_{i+1}^0$ (inégalité triangulaire), ce qui contredit le fait que f atteint son maximum en ce n -uplet. De même si $i = 0$.

En particulier, on peut considérer que f est définie sur l'ouvert $A \neq M_1 \neq M_2 \neq \dots \neq M_n \neq A$ et qu'elle atteint son maximum dans cet ouvert.

Sur cet ouvert, f est de classe C^1 . Si on note $M = (M_1, \dots, M_n)$ où $M_i = (x_i, y_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et si on note

$$\nabla_{M_i} f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(M), \frac{\partial f}{\partial y_i}(M) \right),$$

alors

$$\nabla_{M_i} f(M) = \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_i}}{M_{i-1}M_i} + \frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{M_iM_{i+1}}$$

Le point M est assujetti à vérifier les conditions

$$g_1(M) = \dots g_n(M) = 0.$$

où $g_k(M)$ est par définition égale à $g(M_k)$.

Les vecteurs $\nabla g_k(M)$ sont linéairement indépendants. En effet,

$$\nabla g_k(M) = \underbrace{((0,0), \dots, (0,0))}_{k-1 \text{ fois}}, \nabla g(M_k), (0,0), \dots, (0,0).$$

D'après le théorème des extrémis liés, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que

$$\nabla f(M^0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla g_k(M^0)$$

ce qui donne

$$\nabla_{M_k} f(M^0) = \lambda_k \nabla g(M_k^0).$$

En particulier

$$\frac{\overrightarrow{M_{i-1}^0 M_i^0}}{M_{i-1}^0 M_i^0} + \frac{\overrightarrow{M_i^0 M_{i+1}^0}}{M_i^0 M_{i+1}^0} = \lambda_k \nabla g(M_k^0).$$

En particulier, les vecteurs du membre de gauche étant des vecteurs unitaires dont la somme est un vecteur parallèle à $\nabla g(M_k^0)$, on en déduit qu'ils forment le même angle par rapport au vecteur orthogonal à Γ au point M_k^0 .

Cette condition exprime exactement le fait qu'une boule partant de M_{k-1}^0 rebondit en M_k^0 et va en M_{k+1}^0 . De plus, comme U est convexe, tous les segments $M_k^0 M_{k+1}^0$ sont dans U ce qui exprime le fait que la boule reste au cours de son déplacement dans U .

Une preuve très maline du théorème des extremas liés (communiquée par Antoine Noël, glanée sur internet ?). Supposons que $f(a)$ est un minimum. Si $r = n$ la conclusion du théorème est évidente. Supposons $r < n$. la négation de la conclusion implique que $(d_a g_1, \dots, d_a g_r, d_a f)$ est libre ; on la complète avec $e_{r+2}, \dots, e_n$ en une base de $\mathbb{R}^n$, de sorte qu'on peut appliquer à la fonction

$$F : x \mapsto (g_1(x), \dots, g_r(x), f(x), \langle e_{r+2}|x \rangle, \dots, \langle e_n|x \rangle)$$

le théorème d'inversion locale en a , d'où il vient en particulier qu'on dispose d'un voisinage de $F(a)$ qui est image d'un voisinage de a , mais dans lequel il ne saurait y avoir un point du type $(0, \dots, 0, f(a) - h, *, \dots, *)$. QED.

Une adresse concernant les courbes et les surfaces (donnée encore par Antoine Noël) : <http://www.mathcurve.com>