## Corrigé du Devoir n$^0$2

### Exercice.

**1.** C'est la formule de Poisson (*cf.* Exercice 3.17.).

**2.** Le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{B}_n \\ u = f & \text{sur } \mathbb{S}_n \end{cases}$$

admet une unique solution $u = f$ d'où le résultat.

**3.** Tout polynôme de degré 0 ou 1 est harmonique, d'où le résultat grâce à la question précédente.

**4.1.** S'il existe un polynôme $g$ de degré inférieur ou égal à $m-2$ tel que

$$\Delta((1-\|x\|^2)g) = -\Delta f,$$

alors $(1-\|x\|^2)g + f$ est harmonique et donc

$$P[(1-\|x\|^2)g + f)_{|\mathbb{S}_n}] = P[f_{|\mathbb{S}_n}] = (1-\|x\|^2)g + f$$

**4.2.** Si $T(h) = 0$ alors $(1-\|x\|^2)h$ est harmonique et nulle sur $\mathbb{S}_n$. On en déduit que $(1-\|x\|^2)h$ vaut 0 partout dans $\mathbb{B}_n$ d'après le principe du maximum et donc que $h = 0$. Comme $T$ est linéaire, $T$ est donc injective.

**4.3.** $T$ envoie $E$ dans $E$. Comme $E$ est de dimension finie, que $T$ est linéaire et que $T$ est injective, on en déduit que $T$ est surjective et donc, d'après 4.1, l'assertion enoncée est vraie.

**5.** S'il existe un polynôme $f$ tel que $\|x\|^2 f$ soit harmonique, alors $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = \|x\|^2 f = (1-\|x\|^2)(-f) + f$. Or il existe $g$ de degré inférieur à $m-2$ tel que $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = (1-\|x\|^2)g + f$. On en déduit que $g = -f$ dans $\mathbb{B}_n$ ce qui est absurde.

**6.** Si $f$ est un polynôme tel que $f_{|\mathbb{S}_n} = 0$ alors $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = 0$. Or, il existe un polynôme $g$ tel que $P[f_{|\mathbb{S}_n}] = (1-\|x\|^2)g + f$ ce qui donne $f = (\|x\|^2 - 1)g$.

### Exercice.

On cherche une solution $(x(t), y(t))$ du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$ et $y(0) = y_0$. On a $x' - 2x = 0$ et $x(0) = 1$ donc $x(t) = e^{2t}$. De même, $y' - y = 0$ et $y(0) = y_0$ donc $y(t) = y_0 e^t$.

Si on pose $U(t) = u(x(t), y(t))$ alors

$$\begin{aligned} U'(t) &= x'(t)\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= 2x(t)\frac{\partial u}{\partial x}(x(t), y(t)) + y(t)\frac{\partial u}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0 \end{aligned}$$

donc $U(t) = U(0)$. On en déduit que $u(e^{2t}, y_0 e^t) = u(1, y_0) = h(y_0)$. Si maintenant, on prend $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X > 0$, alors si $t = \frac{1}{2}\ln X$ et si $y_0 = \frac{Y}{\sqrt{X}}$ alors $u(X, Y) = u(e^{2t}, y_0 e^t) = u(1, y_0) = h(y_0) = h(Y/\sqrt{X})$. Réciproquement, si $u(x, y) = h(\frac{y}{\sqrt{x}})$, on en déduit que $u$ est solution de l'équation proposée avec $u(1, y) = h(y)$.

## PROBLEME.

### Question préliminaire

Cela découle directement de la définition de la dérivée d'une distribution.

### Partie I : Inégalité de Hörmander.

**1.** On a $(x\varphi)' = \varphi + x\varphi'$ d'où la première égalité. On a donc $\langle \varphi, \varphi \rangle = \langle (x\varphi)', \varphi \rangle - \langle x\varphi', \varphi \rangle = -\langle x\varphi, \varphi' \rangle - \langle x\varphi', \varphi \rangle$.
Les inégalités sont des conséquences directes.

**2.** Il suffit de le montrer pour $j = 1$. Par linéarité, il suffit de le montrer si $P(D)$ est de la forme $\partial^{|J|}/\partial x^J$. Comme les opérateurs $\partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n$ commutent avec l'opérateur de multiplication par la fonction $x_1$, il suffit donc de le montrer pour $P(D) = \partial^\alpha/\partial x_1^\alpha$. On a alors

$$P_1(D)\varphi = \frac{\partial^\alpha (x_1\varphi)}{\partial x_1^\alpha} - x_1\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} C_\alpha^\beta x_1^{(\beta)}\frac{\partial^{\alpha-\beta}\varphi}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} - x_1\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^\alpha} = \alpha\frac{\partial^{\alpha-1}\varphi}{\partial x_1^{\alpha-1}}$$

Donc $P_1(D)$ est d'ordre $m-1$ si $P$ est un monôme contenant $X_1$, et d'ordre 0 sinon, ce qui prouve que $P_j(D)$ est soit nul, soit d'ordre $m-1$.

**3. a.** Evident.

**b.** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si $\|P_j(D)\varphi\| \le 2mA\|P(D)\varphi\|$, alors, d'après (2),

$$\begin{aligned} \|P(D)(x_j\varphi)\| &\le \|P_j(D)\varphi\| + \|x_j P(D)\varphi\| \\ &\le 2mA\|P(D)\varphi\| + A\|P(D)\varphi\| = (2m+1)A\|P(D)\varphi\|. \end{aligned}$$

**c.** Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\|P(D)\varphi\|^2 = \langle P(D)\varphi, P(D)\varphi\rangle = \langle P^*(D)P(D)\varphi, \varphi\rangle = \langle P(D)P^*(D)\varphi, \varphi\rangle$ (car deux opérateurs différentiels à coefficients constants commutent), et donc $\|P(D)\varphi\|^2 = \langle P^*(D)\varphi, P^*(D)\varphi\rangle = \|P^*(D)\varphi\|^2$.

**d. i.** Cela découle directement de (2).

**ii.** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned}\langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle &= \langle P_j^*(D)P(D)(x_j\varphi), \varphi\rangle \\ &= \langle P(D)P_j^*(D)(x_j\varphi), \varphi\rangle\end{aligned}$$

(car deux opérateurs différentiels à coefficients constants commutent), et donc

$$\langle P(D)(x_j\varphi), P_j(D)\varphi\rangle = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle.$$

**iii.** Découle directement des deux questions précédentes.

**iv.** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a $\|P_j^*(D)(x_j\varphi)\| = \|P_j(D)(x_j\varphi)\| \leq$. Si on suppose $\mathcal{P}(m-1)$ vraie alors, comme $P_j(D)$ est d'ordre $m-1$, 3.b nous donne :

$$\|P_j^*(D)(x_j\varphi)\| \leq (2m-1)A\|P_j(D)\varphi\|.$$

**v.** On a

$$\begin{aligned}|\langle x_jP(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle| &\leq \|x_jP(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\| \\ &\leq A\|P(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\|.\end{aligned}$$

D'après d.iii.,

$$\|P_j(D)\varphi\|^2 = \langle P_j^*(D)(x_j\varphi), P^*(D)\varphi\rangle - \langle x_jP(D)\varphi, P_j(D)\varphi\rangle.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|P_j(D)\varphi\|^2 &\leq \|P_j^*(D)(x_j\varphi)\|\|P^*(D)\varphi\| + A\|P(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\| \\ &\leq (2m-1)A\|P_j(D)\varphi\|\|P(D)\varphi\| + A\|P(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\| \\ &= 2mA\|P(D)\varphi\|\|P_j(D)\varphi\|,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée. En particulier, $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

**4.** Soit $\mathbb{Q}(m)$ la propriété suivante :

$\mathbb{Q}(m) =$“ Pour tout opérateur $P(D)$ d'ordre inférieur ou égal à $m$, on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \|P(D)\varphi\| \geq \frac{1}{2^m m! A^m} \max_{|J|=m}(|a_J|J!)\|\varphi\|$$

Si $m = 0$, $\mathbb{Q}(m)$ est trivialement vraie. Supposons $m > 0$ et que $\mathbb{Q}(m)$ est vraie jusqu'au rang $m-1$. Soit $J_0$ tel que $|a_{J_0}J_0!| = \max_{|J|=m}(|a_J|J!)$. Supposons $J_0 = (j_1, \dots, j_n)$ avec $j_1 > 0$. En particulier, d'aprè la question 3, $\|P(D)\varphi| \geq \frac{1}{2mA}\|P_1(D)\varphi\|$. D'après l'hypothèse de récurrence, comme $P_1(D)$ est d'ordre $m-1$, on a :

$$\|P_j(D)\varphi| \geq \frac{1}{2^{m-1}A^{m-1}(m-1)!} \max_{|J|=m-1}(|b_J|J!)\|\varphi\|.$$

Mais, $b_J = 0$ si $j_1 = 0$ et $b_J = j_1 a_{(j_1+1,\dots,j_n)}$ si $j_1 > 0$. Il en résulte que $\max_{|J|=m-1}(|b_J|J!) = j_1 \max_{|J|=m}(|a_J|J!)$. Et donc,

$$\|P_j(D)\varphi| \geq j_1 \frac{1}{2^{m-1}A^{m-1}(m-1)!} \max_{|J|=m}(|a_J|J!)\|\varphi\|,$$

d'où le résultat.

## Partie II.

**1.** D'après la question 3.c, on a le résultat.

**2.** Si $\psi = P^*(D)\varphi_1 = \mathcal{P}^*(D)\varphi_2$, alors $P^*(D)(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que $\varphi_1 = \varphi_2$, et donc l'application $E \ni \psi \mapsto \langle g, \varphi \rangle$ est bien définie. La linéarité est immédiate. Enfin, si $\psi = P^*(D)\varphi \in E$, on a :

$$|\langle g, \varphi \rangle| \leq \|g\|\|\varphi\| \leq \frac{\|g\|}{C_P}\|P^*(D)\varphi\| = \frac{\|g\|}{C_P}\|\psi\|,$$

ce qui implique la continuité.

**3.** L'application précédente se prolonge en une forme linéaire continue $\Phi$ sur $\overline{E}$ de norme $\|\Phi\| \leq \|g\|/C_P$. D'après le théorème de Riesz, comme $\overline{E}$ est un espace de Hilbert, il existe $u \in \overline{E}$ tel que

$$\forall v \in \overline{E} \qquad \langle u, v \rangle = \Phi(v),$$

ce qui implique le résultat demandé. De plus, $\|u\| = \|\Phi\|$.

**4.** D'après la question préliminaire 1, $u$ est une solution de $P(D)u = g$. De plus, nous avons l'estimation $\|u\| = \|\Phi\| \leq \|g\|/C_P$.