

Corrigé de l'Ecrit Blanc

Question préliminaire.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a : $\forall c \in C, |d(x, c) - d(y, c)| \leq d(x, y)$. Donc $\forall c \in C, d_C(x) - d(x, y) \leq d(x, c) - d(x, y) \leq d(y, c)$. En passant à la borne inférieure sur $c \in C$ dans le membre de droite, on obtient $d_C(x) - d(x, y) \leq d_C(y)$ soit $d_C(x) - d_C(y) \leq d(x, y)$. L'autre inégalité s'obtient de manière analogue.

Partie I. Quelques exemples.

1. $d_a(x) = \sqrt{\langle x - a, x - a \rangle}$. $x \mapsto \langle x - a, x - a \rangle$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et $\sqrt{\cdot}$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$. Or $\langle x - a, x - a \rangle > 0$ si $x \neq a$, donc d_a est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.
2. En changeant de repère orthonormé, on suppose que $S = [-a, a] \times \{0\}$. Alors $d_S(x)^2 = \varphi(x_1) + \sum_{i=2}^n x_i^2$, où $\varphi(x_1) = (x_1 + a)^2$ si $x_1 \leq -a$, $\varphi(x_1) = 0$ si $x_1 \in [-a, a]$ et $\varphi(x_1) = (x_1 - a)^2$ si $x_1 \geq a$.
 φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc d_S^2 est C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Comme $d_S^2 > 0$ si $x \notin S$, $d_S = \sqrt{d_S^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus S$.
3. a. f est continue sur le compact $[x_0, x_1]$ donc admet un minimum en un point $c \in [x_0, x_1]$ qui ne peut valoir x_0 et x_1 . On a donc $c \in]x_0, x_1[$ et $f'(c) = 0$.
b. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f'(x_0) \leq f'(x_1)$. Soit $\gamma \in [f'(x_0), f'(x_1)]$. Si $\gamma = f'(x_0)$ ou $\gamma = f'(x_1)$, le résultat énoncé est trivial. Supposons donc $f'(x_0) < \gamma < f'(x_1)$. La question précédente appliquée à la fonction $x \mapsto f(x) - \gamma x$ donne le résultat.
c. S'il existe x_0 et x_1 tels que $f'(x_0) = -1$ et $f'(x_1) = 1$, la question précédente montre qu'il existe c tel que $f'(c) = 0$ ce qui est absurde. On a donc $f' \equiv 1$ ou $f' \equiv -1$. Supposons $f' \equiv 1$. Pour $t \in]a, b[$ et $x \in]a, b[$, on a $f(t) - f(x) = (t - x)$. Faisant tendre x vers a grâce à la continuité de f , on a $f(t) = f(a) + t - a$ pour $t \in]a, b[$ puis pour $t \in [a, b]$ par continuité. Le cas $f' \equiv -1$ se traite de manière analogue.

Partie II. Différentiabilité de fonctions distance.

1. $C \subset \bar{C}$ donc $d_{\bar{C}} \leq d_C$.
Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \bar{C}$. y est la limite d'une suite (y_k) de C . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d(x, y_k) \geq d_C(x)$ donc $d(x, y) \geq d_C(x)$. Comme y est quelconque dans $\bar{C}$, on obtient $d_{\bar{C}} \geq d_C$ d'où l'égalité.

2. Soit (y_k) une suite d'éléments de C telle que $\lim d(x, y_k) = d_C(x)$. La suite (y_k) est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite convergente vers c . $c \in C$ car C est fermé et $d(x, c) = d_C(x)$ par passage à la limite.
3. On a $\|y_k\| \leq \|x_k\| + \|y_k - x_k\| = \|x_k\| + d_C(x_k)$. Comme $\lim_k (\|x_k\| + d_C(x_k)) = \|x_\infty\| + d_C(x_\infty)$ car d_C est continue, la suite (y_k) est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergente vers y_∞ . $y_\infty \in C$ puisque C est fermé. Or $d(x_k, y_k) = d_C(x_k)$ donc $d(x_\infty, y_\infty) = d_C(x_\infty)$ et $y_\infty \in C_{x_\infty}$.
4. a. C_x est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ donc compact. L'application $y \mapsto \langle x - y, h \rangle$ est continue donc possède un minimum sur C_x en $c \in C_x$. Le c ainsi construit répond à la question.
- b. Si $h \in \mathbb{R}^n$ et $c \in C$, on a $d_C^2(x+h) \leq \|x-c+h\|^2 = \|x-c\|^2 + 2\langle h, x-c \rangle + \|h\|^2$. Si on applique cela au c de la question précédente, on a $d_C^2(x+h) \leq d_C^2(x) + 2p_{x,C}(h) + \|h\|^2$.
- c. L'application distance est continue sur le produit de deux compacts qui est compact donc atteint son minimum.
Supposons que δ_x ne tende pas vers 0 quand $h \rightarrow 0$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et $h_k \rightarrow 0$ tel que $\delta_x(h_k) \geq \varepsilon$. Choisissons $(y_k) \in C_{x+h_k}$. Il existe une sous-suite de y_k qui converge vers $y \in C_x$. Or $d(y_k, y) \geq \delta_x(h_k) \geq \varepsilon$. C'est absurde.
L'existence de y et z est justifiée par le fait qu'une fonction continue sur un compact atteint son minimum.
On a alors $d_C^2(x+h) = \|x+h-z\|^2 = \|x-z\|^2 + 2\langle x-z, h \rangle + \|h\|^2 \geq d_C^2(x) + 2\langle x-y, h \rangle + 2\langle y-z, h \rangle + \|h\|^2 \geq d_C^2(x) + 2p_{x,C}(h) - 2\|y-z\|\|h\| + \|h\|^2$.
Le résultat en découle puisque $\delta_x(h) = \|y-z\|$.
On a alors la double inégalité suivante (qui découle aussi de la question 4.b de la partie II) :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \|h\| - 2\delta_x(h) \leq \frac{d_C^2(x+h) - d_C^2(x) - 2p_{x,C}(h)}{\|h\|} \leq \|h\|$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|d_C^2(x+h) - d_C^2(x) - 2p_{x,C}(h)|}{\|h\|} = 0.$$

- d. Si C_x est réduit à un seul point c_x , alors $h \mapsto p_{x,C}(h) = \langle x - c_x, h \rangle$ est linéaire continue et donc d_C^2 est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\nabla d_C^2(x) = 2(x - c_x)$.
Réciproquement, supposons d_C^2 différentiable de différentielle φ . Soit $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(h) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{d_C^2(x+th) - d_C^2(x)}{t}.$$

Or

$$d_C^2(x+th) - d_C^2(x) - 2p_{x,C}(th) = o(t^2)$$

avec $p_{x,C}(th) = tp_{x,C}(h)$, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{d_C^2(x+th) - d_C^2(x)}{t} = 2p_{x,C}(h)$$

et $\varphi = 2p_{x,C}$.

En particulier, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $p_{x,C}(-h) = -p_{x,C}(h)$ et donc

$$\inf_{c \in C_x} \langle x - c, -h \rangle = -\sup_{c \in C_x} \langle x - c, h \rangle = -\inf_{c \in C_x} \langle x - c, h \rangle$$

ce qui entraîne que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $c, c' \in C_x$, $\langle x - c, h \rangle = \langle x - c', h \rangle$, soit encore $\langle c - c', h \rangle = 0$. h étant quelconque, on obtient $c = c'$, ce qui implique que C_x est réduit à un singleton.

5. Si $x \in C$, alors $C_x = \{x\}$. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ alors $d_C(x) > 0$. Donc C_x est un singleton pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si d_C^2 est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus C$ si et seulement si d_C est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus C$.

6. Notons c_x l'unique élément de C_x . On a $\nabla d_C^2(x) = 2(x - c_x)$. Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, $\nabla d_C(x) = \frac{\nabla d_C^2(x)}{2d_C(x)} = \frac{x - c_x}{\|x - c_x\|}$ d'où $\|\nabla d_C\| = 1$.

On a établi à la question 4.c de la partie II que $\lim_{h \rightarrow 0} \delta_x(h) = 0$, ce qui s'écrit ici $\lim_{h \rightarrow 0} d(c_x, c_{x+h}) = 0$. c est donc continue sur $\mathbb{R}^n$ et par suite ∇d_C est continue sur $\mathbb{R}^n \setminus C$ et d_C est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Partie III. Etude des fonctions de classe C^2 de gradient unitaire.

1. On a $\ell(\gamma) = \|\gamma(b)\| = \gamma_1(b) = \int_a^b \gamma'_1(t) dt \leq \int_a^b |\gamma'_1(t)| dt \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \ell(\gamma)$. Donc toutes les intégrales sont égales. Comme les applications dans les intégrands sont continues, on a égalité des intégrands et donc $\gamma'_1(t) = |\gamma'_1(t)|$ est positive et $(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = (0, \dots, 0)$. Donc $\gamma([a, b]) = [\gamma(a), \gamma(b)]$.

2. $|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))| = \left| \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b \|\nabla f(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \ell(\gamma)$.

En particulier, si a, b sont dans U et si $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ alors $\gamma'(t) = (b-a)$ et $|f(b) - f(a)| \leq \|b - a\|$.

3. Application directe du théorème de Cauchy-Lipschitz.

4. On a

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \|\nabla f(\gamma(t))\|^2 = 1.$$

Donc pour tout $s \in [a, b]$, on a $f(\gamma(s)) = f(\gamma(a)) + \int_a^s dt = f(\gamma(a)) + (s - a)$.

Supposons d'abord de plus que le segment $[\gamma(a), \gamma(b)]$ est inclus dans U . On a alors

$$\|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\| \leq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|,$$

soit $b - a \leq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$. Or :

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\nabla f(\gamma(t))\| dt = b - a.$$

Donc $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = \ell(\gamma) = b - a$. D'après la question 1 de la partie III, $\gamma([a, b])$ est donc le segment $[\gamma(a), \gamma(b)]$.

Plus précisément, en posant $e_1 = \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{\|\gamma(b) - \gamma(a)\|}$, on a pour tout $s \in [a, b]$, $\gamma(s) = \gamma(a) + \gamma_1(s)e_1$, où γ_1 croît de 0 à $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = b - a$. Mais alors, $\gamma'(s) = \gamma'_1(s)e_1$. Or $\|\gamma'(s)\| = 1$, donc $|\gamma'_1(s)| = 1$, et $\gamma'_1(s) = 1$ car γ_1 croît. Finalement, $\gamma_1(s) = s - a$ et $e_1 = \gamma'(a) = \nabla f(a)$, d'où

$$\gamma(s) = \gamma(a) + (s - a)\nabla f(a).$$

Pour conclure sans supposer à priori que $[\gamma(a), \gamma(b)] \subset U$, on remarque que, pour tout $s \in]a, b[$, on peut trouver (α, β) tels que $a \leq \alpha < s < \beta \leq b$ et $[\gamma(\alpha), \gamma(\beta)] \subset U$, donc γ est affine sur $[\alpha, \beta]$, et $\gamma''(s) = 0$. γ'' est donc nulle sur $]a, b[$ et γ' est constante sur $[a, b]$, d'où encore $\gamma(s) = \gamma(a) + (s - a)\nabla f(a)$.

5. Soit γ la solution maximale de $\mathcal{E}_f$ telle que $\gamma(0) = x$, et notons $] \alpha, \beta [$ son intervalle (ouvert) de définition. D'après la question précédente, γ est affine sur tout segment inclus dans $] \alpha, \beta [$, elle est donc affine sur $] \alpha, \beta [$ et $\forall s \in] \alpha, \beta [$, $\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0)$, soit $\gamma(s) = x + s\nabla f(x)$. Par suite, $a_x \leq \alpha \leq \beta \leq b_x$.

Si on suppose par exemple que $a_x < \alpha$, alors $\lim_{s \rightarrow \alpha+} \gamma(s) = x + \alpha\nabla f(x) \in U$, ce qui est impossible puisque γ est une solution maximale de $\mathcal{E}_f$. Donc $\alpha = a_x$ et $\beta = b_x$.

De plus, d'après la question précédente, $f \circ \gamma$ est également affine et de dérivée égale à 1. Donc $f(\gamma(s)) = f(x) + s$, soit $f(x + s\nabla f(x)) = f(x) + s$.

6. a. On suppose que, $\forall s \geq 0$, $\|y - x - sv\|^2 \geq s^2$, soit :

$$\|y - x\|^2 - 2s\langle y - x, v \rangle \geq 0.$$

Donc nécessairement $\langle y - x, v \rangle \leq 0$.

- b. Comme $\mathbb{R}^n$ est convexe, f est 1-lipschitzienne. Supposons $f(y) = f(x)$. Alors $d(y, x + s\nabla f(x)) \geq |f(y) - f(x + s\nabla f(x))| = |s|$. Par suite, $\langle y - x, \nabla f(x) \rangle \leq 0$ et $\langle y - x, -\nabla f(x) \rangle \leq 0$ d'où $\langle y - x, \nabla f(x) \rangle = 0$.

Posons alors $v = \nabla f(0)$, et $\gamma(s) = sv$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. D'après la question 5 de la partie III, γ est la solution maximale de $\mathcal{E}_f$ telle que $\gamma(0) = 0$ donc $v = \gamma'(s) = \nabla f(sv)$. De plus, $f(sv) = f(0) + s$.

Soit x quelconque dans $\mathbb{R}^n$ et $s = f(x) - f(0)$. Alors $f(x) = f(sv)$, donc $\langle x - sv, \nabla f(sv) \rangle = 0$, soit $\langle x - sv, v \rangle = 0$ et $\langle x, v \rangle = s$. Par suite, $f(x) = f(0) + \langle x, v \rangle$ et f est affine.

7. On prend ici $U = \mathbb{R}^n \setminus C$ et $f = d_C$. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$. Notons $c(x)$ l'unique élément de C_x , et $v = \nabla f(x) = \frac{x - c(x)}{\|x - c(x)\|}$.
 Pour tout $s \in]a_x, b_x[$, on a $d_C(x + sv) = d_C(x) + s$. On a donc $a_x \geq -d_C(x)$, et même $a_x = -d_C(x)$ car $x + a_x v \notin U$.
 De même, $b_x = +\infty$, car sinon on aurait $d_C(x + b_x v) = d_C(x) + b_x > 0$ et $x + b_x v \in U$.
 En posant $t = d_C(x) + s$, on obtient donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $d_C(x - d_C(x)v + tv) = t$. Or $x - d_C(x)v = c(x)$. Par suite, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $d_C(c(x) + tv) = t$. Donc $\langle y - c(x), v \rangle \leq 0$. Notons alors $H_x = \{y \in \mathbb{R}^n, \langle y - c(x), v \rangle \leq 0\}$. On a $C \subset H_x$. De plus, $\langle x - c(x), v \rangle = d_C(x) > 0$, donc $x \notin H_x$.
 Par suite, $C = \bigcap_{x \in U} H_x$. C est une intersection de demi-espaces affines fermés convexes. C est donc convexe.

Partie IV. Etude des fonctions de classe C^1 de gradient unitaire.

1. D'après la question 2 de la partie III, f est 1-lipschitzienne sur $\overline{B}(x, r)$. Donc, si $\|v\| = r$,

$$f(x + v) - f(x) \leq |f(x + v) - f(x)| \leq \|v\| = r,$$
 d'où $\theta(x, r) \leq r$.
 Soit $u = \nabla f(x)$. On a $\frac{f(x + r'u) - f(x)}{r'} \leq \frac{\theta(x, r')}{r'} \leq 1$ si $r' \in]0, r]$. Or

$$\lim_{r' \rightarrow 0} \frac{f(x + r'u) - f(x)}{r'} = \langle \nabla f(x), u \rangle = 1. \text{ Donc } \lim_{r' \rightarrow 0+} \frac{\theta(x, r')}{r'} = 1.$$
2. La fonction f n'a pas de point critique dans U . Or $\overline{B}(x, r)$ est compact, donc f possède un maximum sur $\overline{B}(x, r)$ qui ne peut être atteint que sur la frontière de $\overline{B}(x, r)$. Ce maximum est donc $f(x) + \theta(x, r)$, et pour tout $y \in B(x, r)$, $f(y) < f(x) + \theta(x, r)$. En particulier, pour $y = x$, on a $\theta(x, r) > 0$.
3. a. Notons que $\theta(x + w, \frac{r}{2})$ existe car $\overline{B}(x + w, \frac{r}{2}) \subset \overline{B}(x, r) \subset U$. Choisissons v tel que $\|v\| = \frac{r}{2}$ et $\theta(x + w, \frac{r}{2}) = f(x + w + v) - f(x + w)$. Alors $x + w + v \in \overline{B}(x, r)$ et $f(x + w) - f(x) + \theta(x + w, \frac{r}{2}) = f(x + w + v) - f(x) \leq \theta(x, r)$.
 b. Choisissons maintenant w tel que $f(x + w) - f(x) = \theta(x, \frac{r}{2})$. Alors $\theta(x, \frac{r}{2}) + \theta(x + w, \frac{r}{2}) \leq \theta(x, r)$. Si $\theta(x, \frac{r}{2}) \leq \frac{1}{2}\theta(x, r)$, on pose $x_1 = x$. Sinon $\theta(x + w, \frac{r}{2}) < \frac{1}{2}\theta(x, r)$ et on pose $x_1 = x + w$. on a bien $x_1 \in \overline{B}(x, \frac{r}{2})$ et $\theta(x_1, \frac{r}{2}) \leq \frac{1}{2}\theta(x, r)$.
4. a. On définit la suite x_k par récurrence : on pose $x_0 = x$. Si $\overline{B}(x_k, \frac{r}{2}) \subset \overline{B}(x, r)$, on choisit $x_{k+1} \in \overline{B}(x_k, \frac{r}{2^{k+1}})$ tel que $\theta(x_{k+1}, \frac{r}{2^{k+1}}) \leq \frac{1}{2}\theta(x_k, \frac{r}{2^k})$ et qui existe grâce à la question précédente. On a alors

$$\overline{B}(x_{k+1}, \frac{r}{2^{k+1}}) \subset \overline{B}(x_k, \frac{r}{2^k}) \subset \overline{B}(x, r),$$

ce qui permet de poursuivre.

- b. On a alors $\theta(x_k, \frac{r}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k} \theta(x, r)$. D'où $\frac{2^k}{r} \theta(x_k, \frac{r}{2^k}) \leq \frac{\theta(x, r)}{r} \leq 1$. Comme $\lim \frac{r}{2^k} = 0$, on est tenté de conclure à l'aide de la question 1 de la partie IV, mais ce n'est pas possible directement car x_k varie.

La suite (x_k) est de Cauchy, elle converge donc vers $y \in \overline{B}(x, r)$. Notons $u = \nabla f(y)$. Alors :

$$\frac{2^k}{r} \theta(x_k, \frac{r}{2^k}) \geq \frac{2^k}{r} \left(f(x_k + \frac{r}{2^k} u) - f(x_k) \right).$$

Or $\frac{2^k}{r} \left(f(x_k + \frac{r}{2^k} u) - f(x_k) \right) = \int_0^1 \langle \nabla f(x_k + \frac{r}{2^k} t u), u \rangle dt$, qui tend vers $\int_0^1 \langle u, u \rangle dt = 1$ par application du théorème de convergence dominée. Par suite $\frac{\theta(x, r)}{r} = 1$ et $\theta(x, r) = r$.

5. Choisissons v tel que $\|v\| = r$ et $f(x+v) - f(x, v) = \theta(x, r) = r$. Posons alors $w = \frac{v}{r}$. On a $\|w\| = 1$ et $f(x+rw) = f(x) + r$.

Soit $t \in [0, r]$. Comme f est 1-lipschitzienne sur $\overline{B}(x, r)$, on a :

$$f(x+tw) - f(x) \leq t \quad \text{et} \quad f(x+rw) - f(x+tw) \leq r-t.$$

Donc $\forall t \in [0, r]$, $f(x+tw) = f(x) + t$.

En dérivant, on obtient $\langle \nabla f(x+tw), w \rangle = 1$. Or $\|\nabla f(x+tw)\| = \|w\| = 1$. Par conséquent, $\forall t \in [0, r]$, $\nabla f(x+tw) = w$. En particulier $\nabla f(x) = w$.

6. Posons $w = \nabla f(x)$, et $A = \{s \in]a_x, b_x[, \nabla f(x+sw) = w\}$. A est fermé dans $]a_x, b_x[$. Soit $s \in A$. Posons $y = x+sw$. On a $\nabla f(y) = w$.

Il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(y, r) \subset U$. Alors, d'après la question précédente, on a $\nabla f(y+tw) = w$ pour tout $t \in [0, r]$. De même, en appliquant la question précédente à $-f$, on a $-\nabla f(y-tw) = -w$ pour tout $t \in [0, r]$. Donc $]s-r, s+r[\subset A$. A est donc également ouvert dans $]a_x, b_x[$. Or $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. Donc $A =]a_x, b_x[$ et $\forall s \in]a_x, b_x[, \nabla f(x+sw) = w$.

Mais alors $s \mapsto f(x+sw)$ a une dérivée constante égale à 1 sur $]a_x, b_x[$. D'où $\forall s \in]a_x, b_x[, f(x+sw) = f(x) + s$.

7. La démonstration donnée en question 6 de la partie III est encore valable en utilisant la question 6 de la partie IV au lieu de la question 5 de la partie III.

8. (i) $\Rightarrow$ (ii) : L'existence de c est acquise. Il s'agit d'établir l'unicité. Soient c, c' dans C_x . Alors $\|c - c'\| = 2(\|x - c\|^2 + \|x - c'\|^2) - 4\|x - \frac{c+c'}{2}\|$. Or $\frac{c+c'}{2} \in C$ donc $4\|x - \frac{c+c'}{2}\| \geq d_C(x)$, et $\|x - c\| = \|x - c'\| = d_C(x)$. D'où $\|c - c'\|^2 \leq 0$ et $c = c'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : c'est la question 5 de la partie II.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : La démonstration donnée dans la question 7 de la partie III est encore valable en utilisant la question 6 de la partie IV au lieu de la question 5 de la partie III.

Donc (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Fin du corrigé.