

Solutions des exercices.

Exercice 1.1. La formule du multinôme se prouve par récurrence sur n . Pour $n = 1$, elle est vraie. Pour $n = 2$, c'est la formule du binôme usuelle. Supposons la vraie au rang $n - 1$. On a alors

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = ((x_1 + \dots + x_{n-1}) + x_n)^k = \sum_{\alpha_n=0}^k \binom{k}{\alpha_n} x_n^{\alpha_n} (x_1 + \dots + x_{n-1})^{k-\alpha_n}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le dernier membre vaut

$$\sum_{\alpha_n=0}^k \sum_{|\alpha'|=k-\alpha_n} \binom{k}{\alpha_n} \binom{k-\alpha_n}{\alpha'} x_n^{\alpha_n} x'^{\alpha'}$$

avec $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ et $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, et ce terme vaut

$$\sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha$$

car

$$\binom{k}{\alpha_n} \binom{k-\alpha_n}{\alpha'} = \frac{k!}{\alpha_n! (k-\alpha_n)!} \frac{(k-\alpha_n)!}{\alpha'!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Exercice 1.2. Pour $n = 1$, la formule à prouver est la formule de Leibniz classique en une variable

$$(uv)^{(\alpha)} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} u^{(\beta)} v^{(\alpha-\beta)}$$

qui est bien connue.

Supposons la formule de Leibniz vraie dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et prouvons la dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ un n -multiindice et $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. On a

$$\partial^\alpha (uv) = \partial_n^{\alpha_n} \partial_{x'}^{\alpha'} (uv),$$

où on a noté $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et $\partial_{x'}^{\alpha'} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction $x' \mapsto uv(x', x_n)$ où x_n est fixé, on a :

$$\partial_n^{\alpha_n} \partial_{x'}^{\alpha'} (uv) = \partial_n^{\alpha_n} \left(\sum_{\substack{\beta'=(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \\ \beta' \leq \alpha'}} \binom{\alpha'}{\beta'} \partial_{x'}^{\beta'} u \partial_{x'}^{\alpha' - \beta'} v \right)$$

qui vaut

$$\sum_{\substack{\beta'=(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \\ \beta' \leq \alpha'}} \binom{\alpha'}{\beta'} \partial_n^{\alpha_n} \left(\partial_{x'}^{\beta'} u \partial_{x'}^{\alpha' - \beta'} v \right).$$

Appliquant une nouvelle fois la formule de Leibniz en une variable, on a

$$\partial_n^{\alpha_n} \left(\partial_{x'}^{\beta'} u \partial_{x'}^{\alpha' - \beta'} v \right) = \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{\beta_n} (\partial_n^{\beta_n} \partial_{x'}^{\beta'} u) (\partial_n^{\alpha_n - \beta_n} \partial_{x'}^{\alpha' - \beta'} v),$$

donc

$$\partial^\alpha (uv) = \sum_{\substack{\beta'=(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \\ \beta' \leq \alpha'}} \sum_{\beta_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha'}{\beta'} \binom{\alpha_n}{\beta_n} (\partial_n^{\beta_n} \partial_{x'}^{\beta'} u) (\partial_n^{\alpha_n - \beta_n} \partial_{x'}^{\alpha' - \beta'} v)$$

qui vaut

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \partial^{\alpha - \beta} v$$

car

$$\binom{\alpha'}{\beta'} \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha'!}{\beta'!(\alpha' - \beta')!} \frac{\alpha_n!}{\beta_n!(\alpha_n - \beta_n)!} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \binom{\alpha}{\beta},$$

d'où le résultat.

Exercice 1.3. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on applique la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à la fonction $t \mapsto g(t) = f(tx)$ pour obtenir, si $N \in \mathbb{N}^*$:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + \dots + \frac{1}{N!} g^{(N)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} g^{(N+1)}(t) dt.$$

Or

$$g(1) = f(x), \quad g(0) = f(0), \quad g'(0) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0),$$

$$\begin{aligned}
g''(0) &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0), \\
&\vdots \\
g^{(N)}(0) &= \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n x_{i_1} \dots x_{i_N} \frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}}(0).
\end{aligned}$$

On remarque que, formellement, on a

$$\frac{1}{k!} g^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} (x_1 \partial_1 + \dots + x_n \partial_n)^k f(0)$$

avec la convention que $x_i \partial_i x_j \partial_j = x_i x_j \partial_{ij}$, même si $i = j$. En utilisant la formule du multinôme, on a

$$\frac{1}{k!} g^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(0) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) x^\alpha.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\frac{1}{\|x\|^N} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} g^{(N+1)}(t) dt \xrightarrow{\|x\| \rightarrow 0} 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{(N+1)!} g^{(N+1)}(t) \right| &= \left| \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(tx) x^\alpha \right| \\
&\leq \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(tx)| |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} \\
&\leq \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(tx)| \|x\|^{\alpha_1} \dots \|x\|^{\alpha_n} \\
&= \|x\|^{N+1} \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(tx)|.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\|x\|^N} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} g^{(N+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \|x\| (N+1) \int_0^1 (1-t)^N \left(\sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha f(tx)| \right) dt \xrightarrow{\|x\| \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

car les dérivées partielles de f sont bornées au voisinage de l'origine. On a donc bien obtenu le résultat escompté.

Exercice 1.4. Si u est de classe C^1 dans Ω et si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+y]$ soit dans Ω , posant $v(t) = u(x+ty)$ pour $t \in [0, 1]$, on remarque que v est bien définie, dérivable sur $[0, 1]$ et donc que

$$\begin{aligned} |u(x+y) - u(x)| &= |v(1) - v(0)| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |v'(t)| \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |y \cdot \nabla u(x+ty)| \\ &\leq \|y\| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla u(x+ty)\|. \end{aligned}$$

En particulier, si K est un compact de Ω et η est strictement inférieur à 1 et à $d(K, \partial\Omega)$, pour tout $x \in K$ et pour tout $y \in B_\eta(0)$, le segment $[x, x+y]$ est dans Ω et donc

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |u(x+y) - u(x)| &\leq \|y\| \sup_{x \in K} \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla u(x+ty)\| \\ &\leq \|y\| \sup_{K+B_\eta(0)} \|\nabla u\| \\ &\leq \|y\|^\lambda \sup_{K+B_\eta(0)} \|\nabla u\| \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u \in C^\lambda(\Omega)$.

Exercice 1.5. Par définition, le support de u est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est nulle. On en déduit que le support de u est le complémentaire de l'intérieur de l'ensemble $\{x, u(x) = 0\}$. Il en résulte que le support de u est l'adhérence du complémentaire de l'ensemble $\{x, u(x) = 0\}$, et donc que $\text{supp } u = \overline{\{x, u(x) \neq 0\}}$.

Exercice 1.6. On applique la formule

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{r=0}^{+\infty} r^{n-1} \int_{\mathbb{S}_n} f(r\zeta) d\sigma_n(\zeta) dr$$

à la fonction f qui vaut 1 sur la boule unité et 0 ailleurs. On a

$$\begin{aligned} \text{Vol } \mathbb{B}_n &= \int_{\mathbb{B}_n} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{r=0}^{+\infty} r^{n-1} \int_{\mathbb{S}_n} f(r\zeta) d\sigma_n(\zeta) dr \\ &= \int_{r=0}^1 r^{n-1} \int_{\mathbb{S}_n} d\sigma_n(\zeta) dr = \sigma(\mathbb{S}_n) \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{1}{n} \sigma(\mathbb{S}_n). \end{aligned}$$

Exercice 1.7. On définit la fonction $F(x)$ par $F(0) = 0$, $F(x) = f(\frac{x}{\|x\|})$ si $x \in \mathbb{B}_n \setminus \{0\}$ et $F(x) = 0$ sinon. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_n \setminus \{0\}} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x) dx = \int_{r=0}^1 r^{n-1} \int_{\mathbb{S}_n} F(r\zeta) d\sigma_n(\zeta) dr \\ &= \int_{\mathbb{S}_n} f(x) d\sigma_n(x) \int_{r=0}^1 r^{n-1} dr = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}_n} f(x) d\sigma_n(x), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 1.8. On reprend la formule de l'exercice précédent. On a

$$\int_{\mathbb{S}_n} f \circ U d\sigma_n = n \int_{\mathbb{B}_n \setminus \{0\}} f\left(\frac{Ux}{\|Ux\|}\right) dx.$$

On pose alors $y = Ux$ dans la dernière intégrale. Comme $|\det U| = 1$ et $U(\mathbb{B}_n) = \mathbb{B}_n$, on a

$$\int_{\mathbb{B}_n \setminus \{0\}} f\left(\frac{Ux}{\|Ux\|}\right) dx = \int_{\mathbb{B}_n \setminus \{0\}} f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) dy$$

donc

$$\int_{\mathbb{S}_n} f \circ U d\sigma_n = \int_{\mathbb{S}_n} f d\sigma_n.$$

Exercice 1.9. Soit $r > 0$. La fonction $x \mapsto \|x\|^\lambda$ est intégrable dans $B_r(0)$ si et seulement si

$$\int_{B_r(0)} \|x\|^\lambda dx < +\infty.$$

Or, en passant en coordonnées sphériques,

$$\int_{B_r(0)} \|x\|^\lambda dx = \sigma(\mathbb{S}_n) \int_{s=0}^r s^{n-1+\lambda} ds.$$

D'après le critère de Riemann, la dernière intégrale est finie si et seulement si $n-1+\lambda > -1$, soit si et seulement si $\lambda > -n$. Donc la fonction $x \mapsto \|x\|^\lambda$ est intégrable dans $B_r(0)$ si et seulement si $\lambda > -n$.

De même,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \|x\|^\lambda dx = \sigma(\mathbb{S}_n) \int_{s=r}^\infty s^{n-1+\lambda} ds.$$

D'après le critère de Riemann, la dernière intégrale est finie si et seulement si $n - 1 + \lambda < -1$, soit si et seulement si $\lambda < -n$. Donc la fonction $x \mapsto \|x\|^\lambda$ est intégrable dans $\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$ si et seulement si $\lambda > -n$.

Exercice 1.10. La fonction $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto e^{-\pi\|x\|^2}$ décroît plus rapidement que n'importe quelle puissance négative de $\|x\|$ quand $\|x\|$ tend vers l'infini. D'après l'exercice précédent, elle est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et d'après le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} \times \cdots \times e^{-\pi x_n^2} dx_n \cdots dx_1 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \right)^n.$$

Le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx$$

(intégrale de Gauß) est classique. Nous le rappelons brièvement. Si

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx,$$

alors

$$I^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy \right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy.$$

On passe en coordonnées polaires dans la dernière intégrale double pour obtenir

$$I^2 = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\pi r^2} r dr d\theta = \int_{r=0}^{+\infty} e^{-\pi r^2} 2\pi r dr.$$

Puis on pose $u = \pi r^2$ dans la dernière intégrale et on obtient

$$I^2 = \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} du = 1,$$

donc $I = 1$ et l'intégrale demandée vaut 1.

Si $\operatorname{Re} s > 0$, on a

$$|e^{-t} t^{s-1}| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{\operatorname{Re} s - 1}$$

qui est intégrable au voisinage de 0. Au voisinage de l'infini, la fonction

$$t \mapsto e^{-t} t^{s-1}$$

décroît plus rapidement que toute puissance négative de t , donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On a, en passant aux coordonnées sphériques

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = \sigma(\mathbb{S}_n) \int_{r=0}^{+\infty} e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr.$$

Posons $t = \pi r^2$ dans la dernière intégrale, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = \sigma(\mathbb{S}_n) \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\sigma(\mathbb{S}_n)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \Gamma(n/2),$$

d'où le résultat. Le volume de $\mathbb{B}_n$ découle alors du résultat de l'exercice 1.6.

Exercice 1.11.

1. La fonction φ' est aussi à support compact donc intégrable. Soit $A > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. On a

$$\int_0^\infty \varphi'(t) dt = \int_0^{A+1} \varphi'(t) dt = \varphi(A+1) - \varphi(0) = -\varphi(0).$$

2. a. Posons $\varphi(t) = f(x + ty)$. Comme $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la fonction $\varphi(t)$ est à support compact. En effet, si on suppose que R est tel que $\text{supp } \varphi$ soit inclus dans $B_R(0)$ et si $t > \frac{\|x\|+R}{\|y\|}$, alors

$$\|x + ty\| \geq |t\|y\| - \|x\| \geq t\|y\| - \|x\| > R,$$

et donc $\varphi(t) = 0$ ce qui prouve que le support de φ est inclus dans $[-\frac{\|x\|+R}{\|y\|}, \frac{\|x\|+R}{\|y\|}]$. Il est clair que φ est de classe C^1 , et donc d'après la question 1, on a

$$f(x) = \varphi(0) = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \nabla f(x + ty) \cdot y dt.$$

- b. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}_n)} \int_{y \in \mathbb{S}_n} f(x) d\sigma_n(y) \\ &= - \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}_n)} \int_{y \in \mathbb{S}_n} \int_0^{+\infty} \nabla f(x + ty) \cdot y dt d\sigma_n(y). \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, si $y \in \mathbb{S}_n$, le support de $t \mapsto \nabla f(x + ty)$ est inclus dans $[-\|x\| - R, \|x\| + R]$, donc

$$f(x) = - \frac{1}{\sigma(\mathbb{S}_n)} \int_{y \in \mathbb{S}_n} \int_0^{\|x\|+R} \nabla f(x + ty) \cdot y dt d\sigma_n(y).$$

Le théorème de Fubini s'applique donc et on obtient

$$f(x) = -\frac{1}{\sigma(\mathbb{S}_n)} \int_0^{\|x\|+R} \int_{y \in \mathbb{S}_n} \nabla f(x+ty) \cdot y \, d\sigma_n(y) \, dt,$$

et donc

$$f(x) = -\frac{1}{\sigma(\mathbb{S}_n)} \int_0^\infty \int_{y \in \mathbb{S}_n} \nabla f(x+ty) \cdot y \, d\sigma_n(y) \, dt.$$

c. On calcule l'intégrale

$$\int_{z \in \mathbb{R}^n} \nabla f(z) \cdot \frac{x-z}{\|x-z\|^n} dz$$

en passant en coordonnées sphériques centrées en x , c'est-à-dire en posant $z = x + ty$ avec $y \in \mathbb{S}^n$ et $t \in [0, +\infty[$. Cette intégrale vaut

$$\int_{t=0}^{+\infty} \int_{y \in \mathbb{S}^n} \nabla f(x+ty) \cdot \frac{ty}{t^n} t^{n-1} d\sigma_n(y) \, dt.$$

On voit facilement que cette intégrale est égale à

$$\int_0^\infty \int_{y \in \mathbb{S}_n} \nabla f(x+ty) \cdot y \, d\sigma_n(y) \, dt,$$

d'où le résultat.

Exercice 1.12. Rappelons le théorème des fonctions implicites (cf. par exemple “Les maths en tête” (Analyse) de Xavier Gourdon aux éditions Ellipses, théorème 2 page 318) :

Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E , V un ouvert de F . Soit $f : U \times V \rightarrow G$ ($(x, y) \mapsto f(x, y)$) une application de classe C^1 . Supposons que, pour $(a, b) \in U \times V$, $\partial_2 f(a, b)$ soit un isomorphisme bicontinu de F sur G . Alors, il existe

- *un voisinage ouvert U' de a avec $U' \subset U$,*
- *un voisinage ouvert W de $f(a, b)$,*
- *un voisinage ouvert Ω de (a, b) (avec $\Omega \subset U \times V$),*
- *une fonction $\varphi : U' \times W \rightarrow V$ de classe C^1 ,*

vérifiant

- pour tout $x \in U'$, pour tout $z \in W$, il existe une unique solution y de $f(x, y) = z$ avec $(x, y) \in \Omega$, et on a $y = \varphi(x, z)$.

En particulier, $f(x, \varphi(x, z)) = z$ pour tout $(x, z) \in U' \times W$.

Supposons $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$. On en déduit qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x_0) \neq 0.$$

Quitte à changer l'ordre des coordonnées, on peut supposer que $i = n$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x_0) \neq 0.$$

Appliquons maintenant le théorème des fonctions implicites avec $E = \mathbb{R}^{n-1}$, $F = \mathbb{R} = G$ et $f = \varphi$ et $z = 0$. Il existe donc une fonction ψ de classe C^1 telle que l'équation de S près de x_0 soit $x_n = \psi(x')$ ce qui termine notre vérification.

Exercice 1.13. Il suffit de montrer que, si $\Psi : x \mapsto (x', x_n - \psi(x'))$, alors, grâce au théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} \right)$$

est inversible. Or, la matrice de cette famille de vecteurs est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} & -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

et elle est bien inversible.

Exercice 1.14. Si x est adhérent à Ω et adhérent au complémentaire de Ω , alors il existe une suite (x_n) de points de Ω qui tend vers x et une suite (y_n) de points de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ qui tend vers x . Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n) < 0$ et $\rho(y_n) \geq 0$, on en déduit que $\rho(x) = 0$, ce qui montre que $\partial\Omega \subset \{x, \rho(x) = 0\}$.

Réciproquement, si $x \in \{x, \rho(x) = 0\}$, montrons que x est adhérent à Ω et au complémentaire de Ω sous l'hypothèse que $\nabla\rho(x) \neq 0$. Pour cela, on remarque que

$$\rho(x + h) = \rho(x) + \nabla\rho(x) \cdot h + o(h)$$

quand h tend vers 0 dans $\mathbb{R}^n$, et donc

$$\rho(x + \frac{1}{n}\nabla\rho(x)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}\|\nabla\rho(x)\|^2$$

ce qui montre que $x + \frac{1}{n}\nabla\rho(x)$ est dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ à partir d'un certain rang. Comme cette suite converge vers x , on en déduit que x est adhérent à $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. De même, en considérant la suite $(x - \frac{1}{n}\nabla\rho(x))$, on en déduit que x est adhérent à Ω et donc

$$\partial\Omega = \{x, \rho(x) = 0\}.$$

On a donc $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{x, \rho(x) \leq 0\}$, et donc $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \{x, \rho(x) > 0\}$.

L'équation du plan tangent à $\partial\Omega$ en x_0 est alors

$$\{x, \nabla\rho(x_0) \cdot (x - x_0) = 0\}.$$

En particulier, les vecteurs normaux à $\partial\Omega$ en x_0 sont colinéaires à $\nabla\rho(x_0)$. Il y a donc deux vecteurs normaux unitaires possibles :

$$\frac{\nabla\rho(x_0)}{\|\nabla\rho(x_0)\|} \quad \text{et} \quad -\frac{\nabla\rho(x_0)}{\|\nabla\rho(x_0)\|}.$$

Montrons que le vecteur extérieur est $\frac{\nabla\rho(x_0)}{\|\nabla\rho(x_0)\|}$. Pour cela, on calcule

$$\rho(x_0 + t\frac{\nabla\rho(x_0)}{\|\nabla\rho(x_0)\|}) = \rho(x_0) + t\nabla\rho(x_0) \cdot \frac{\nabla\rho(x_0)}{\|\nabla\rho(x_0)\|} + o(t) = t\|\nabla\rho(x_0)\| + o(t)$$

et donc, il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, t_0[$, on ait

$$x_0 + t\frac{\nabla\rho(x_0)}{\|\nabla\rho(x_0)\|} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

Exercice 1.15. En un point (x_0, y_0) du bord de Ω qui est le cercle de centre 0 et de rayon 1, le vecteur normal extérieur unitaire est, d'après l'exercice précédent

$$\frac{(2x_0, 2y_0)}{\|(2x_0, 2y_0)\|} = (x_0, y_0).$$

Passons en coordonnées polaires et calculons le laplacien de u en coordonnées polaires. Ecrivons sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\{(x, y), y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$ que $\tilde{u}(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ où $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. On a, au point $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}(x, y),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ &\quad - r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

En particulier,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) = \Delta u(x, y).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dm \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon}^1 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left[\tilde{u} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{v} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \right] r d\theta dr \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon}^1 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left[\tilde{u} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{v} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \right] d\theta dr.\end{aligned}$$

Calculons le terme

$$\begin{aligned}\int_{r=\varepsilon}^1 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\tilde{u} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} - \tilde{v} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} \right) d\theta dr = \\ \int_{r=\varepsilon}^1 \frac{1}{r} \left(\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} - \tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} \right) d\theta \right) dr.\end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} d\theta = \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right]_{\theta=-\pi}^{\pi} - \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} d\theta = - \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} d\theta$$

car $\tilde{u}(r, -\pi) = \tilde{u}(r, \pi)$ et $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta}(r, \pi)$. Et donc,

$$\int_{r=\varepsilon}^1 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\tilde{u} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} - \tilde{v} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} \right) d\theta dr = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dm \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r=\varepsilon}^1 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left[\tilde{u} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) - \tilde{v} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \right] d\theta dr \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left[\tilde{u} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) - \tilde{v} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \right] d\theta dr. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini (qui s'applique ici car on intègre des fonctions continues sur des compacts qui sont donc bornées et donc intégrables), la dernière intégrale vaut

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^1 \left[\tilde{u} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) - \tilde{v} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \right] dr d\theta.$$

Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^1 \tilde{u} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) dr &= \int_{r=0}^1 \tilde{u} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) dr \\ &= \left[\tilde{u} r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right]_{r=0}^1 - \int_{r=0}^1 r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} dr \\ &= \tilde{u}(1, \theta) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}(1, \theta) - \int_{r=0}^1 r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} dr. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^1 \left[\tilde{u} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) - \tilde{v} \left(r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \right] dr d\theta &= \\ \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\tilde{u}(1, \theta) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}(1, \theta) - \tilde{v}(1, \theta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(1, \theta) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Enfin, il est clair que ce dernier terme vaut exactement

$$\int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\lambda.$$

Exercice 1.16. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\nabla v - v\nabla u) &= \partial_1(u\partial_1 v - v\partial_1 u) + \cdots + \partial_n(u\partial_n v - v\partial_n u) \\ &= (u\partial_1^2 v - v\partial_1^2 u) + \cdots + (u\partial_n^2 v - v\partial_n^2 u) = u\Delta v - v\Delta u,\end{aligned}$$

et que

$$(u\nabla v - v\nabla u) \cdot \vec{n} = u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

En appliquant la formule de Green-Ostrogradsky, on obtient la formule de Green-Riemann suivante

$$\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = \int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx.$$

Exercice 1.17.

1. Equation linéaire homogène à coefficients constants du premier ordre.
2. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
3. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
4. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
5. Equation linéaire homogène à coefficients constants du premier ordre.
6. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
7. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
8. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
9. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
10. Equation linéaire homogène à coefficients constants du second ordre.
11. Equation linéaire homogène à coefficients constants du troisième ordre.
12. Equation linéaire homogène à coefficients constants du quatrième ordre.
13. (Liouville) Equation linéaire du premier ordre.
14. (Fokker-Planck) Equation linéaire du second ordre.
15. (Eikonal) Equation quasi-linéaire d'ordre 1.
16. (Poisson non linéaire) Equation quasi-linéaire d'ordre 2.
17. (p -Laplacien) Equation quasi-linéaire d'ordre 2.
18. (Surface minimale) Equation quasi-linéaire d'ordre 2.
19. (Monge-Ampère) Equation quasi-linéaire d'ordre 2.
20. (Hamilton-Jacobi) Equation quasi-linéaire d'ordre 1.
21. (Conservation scalaire) Equation quasi-linéaire d'ordre 1.
22. (Burger) Equation quasi-linéaire
23. (Réaction-Diffusion) Equation linéaire à coefficients constants non homogène du second ordre
24. (Porosité) Equation quasi-linéaire d'ordre 2.
25. (Ondes non linéaires) Linéaire à coefficients constants d'ordre 2 et non homogène.

26. (KdV) Equation quasi-linéaire d'ordre 3.
27. (Elasticité linéaire en équilibre) Système d'équations linéaires à coefficients constants homogène et d'ordre 2.
28. (Elasticité linéaire en évolution) Système d'équations linéaires à coefficients constants homogène et d'ordre 2.
29. (Maxwell) Système d'équations linéaires à coefficients constants homogène d'ordre 1.
30. (Lois de conservation) Système d'équations quasi-linéaire d'ordre 1.
31. (Réaction-Diffusion) Système d'équations quasi-linéaire d'ordre 2.
32. (Euler) Système d'équations quasi-linéaire d'ordre 1.
33. (Navier-Stokes) Système d'équations quasi-linéaire d'ordre 2.

Exercice A. Si $(x(t), y(t))$ est une courbe de $\mathbb{R}^2$ paramétrée par t pour $t \in [a, b]$, alors la longueur de cette courbe est

$$\int_a^b \|(x'(t), y'(t))\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Si $(x(t), y(t), z(t))$ est une courbe gauche dans $\mathbb{R}^3$ paramétrée par t pour $t \in [a, b]$, alors la longueur de cette courbe est

$$\int_a^b \|(x'(t), y'(t), z'(t))\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

La sphère unité est paramétrée par

$$f(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$$

pour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ a un ensemble négligeable près. On a

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = (-\cos \varphi \sin \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0).$$

Le déterminant de Gram vaut donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} & \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi$$

ce qui implique que la surface de la sphère unité est

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi.$$

Si une courbe est donnée en coordonnées polaires par $(r(t), \theta(t))$, pour $t \in [a, b]$, alors la longueur de la courbe est l'intégrale de la longueur de la dérivée du vecteur $(r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{(r'(t) \cos \theta(t) - r(t) \theta'(t) \sin \theta(t))^2 + (r'(t) \sin \theta(t) + r(t) \theta'(t) \cos \theta(t))^2} dt \\ = \int_a^b \sqrt{r^2(t) \theta'^2(t) + r'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Si une courbe est donnée en coordonnées sphériques par $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$, pour $t \in [a, b]$, alors la longueur de la courbe est l'intégrale de la longueur de la dérivée du vecteur $(r(t) \cos \theta(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \theta(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t))$, c'est-à-dire

$$\int_a^b \sqrt{r^2(t) \varphi'^2(t) + r'^2(t) + r^2(t) \theta'^2(t) \cos^2 \varphi(t)} dt.$$

Exercice B. La paramétrisation du bord de l'ouvert est

$$\Psi : x' \mapsto (x', \psi(x')).$$

On a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = (0, \dots, 0, \underset{\text{place } j}{1}, 0, \dots, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x_j})$$

donc la matrice de Gram est

$$\det(I_{n-1} + (\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j})_{i,j=1,\dots,n-1}).$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\det(I_{n-1} + (\lambda_i \lambda_j)_{i,j=1,\dots,n-1}) = 1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2$$

pour conclure.

Pour cela, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 & 1 + \lambda_2^2 \end{vmatrix} = 1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2.$$

Supposons que

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \lambda_{n-1} \\ \lambda_2 \lambda_1 & 1 + \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2 \lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1} \lambda_1 & \lambda_{n-1} \lambda_2 & \cdots & 1 + \lambda_{n-1}^2 \end{vmatrix} = 1 + \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1}^2.$$

On écrit alors que

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \lambda_{n-1} & \lambda_1 \lambda_n \\ \lambda_2 \lambda_1 & 1 + \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2 \lambda_{n-1} & \lambda_2 \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} \lambda_1 & \lambda_{n-1} \lambda_2 & \cdots & 1 + \lambda_{n-1}^2 & \lambda_{n-1} \lambda_n \\ \lambda_n \lambda_1 & \lambda_n \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \lambda_{n-1} & 1 + \lambda_n^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \lambda_{n-1} & 0 \\ \lambda_2 \lambda_1 & 1 + \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2 \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} \lambda_1 & \lambda_{n-1} \lambda_2 & \cdots & 1 + \lambda_{n-1}^2 & 0 \\ \lambda_n \lambda_1 & \lambda_n \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 + \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \lambda_{n-1} & \lambda_1 \lambda_n \\ \lambda_2 \lambda_1 & 1 + \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2 \lambda_{n-1} & \lambda_2 \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} \lambda_1 & \lambda_{n-1} \lambda_2 & \cdots & 1 + \lambda_{n-1}^2 & \lambda_{n-1} \lambda_n \\ \lambda_n \lambda_1 & \lambda_n \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \lambda_{n-1} & \lambda_n^2 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant vaut, grâce à l'hypothèse de récurrence, $1 + \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1}^2$. Si on met λ_n en facteur dans la dernière ligne et dans la dernière colonne, le second déterminant vaut

$$\lambda_n^2 \begin{vmatrix} 1 + \lambda_1^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \lambda_{n-1} & \lambda_1 \\ \lambda_2 \lambda_1 & 1 + \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2 \lambda_{n-1} & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} \lambda_1 & \lambda_{n-1} \lambda_2 & \cdots & 1 + \lambda_{n-1}^2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Si on retranche λ_1 fois la dernière ligne à la première ligne, puis λ_2 fois la dernière ligne à la seconde ligne, ..., et λ_{n-1} fois la dernière ligne à la $n - 1$ ème ligne, le dernier terme vaut

$$\lambda_n^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = \lambda_n^2,$$

ce qui termine donc la preuve par récurrence.