Solutions des exercices du chapitre 3.

Exercice 3.1. Calculons

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{r=0}^{t} f(r, x+(r-t)\xi)dr\right).$$

On introduit pour cela la fonction

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_{r=0}^{t_1} f(r, x+(r-t_2)\xi)dr.$$

Cette fonction est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\int_{r=0}^{t} f(r, x+(r-t)\xi)dr = \varphi(t, t),$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{r=0}^{t} f(r, x+(r-t)\xi)dr\right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t,t)\\ &= f(t,x) - \int_{r=0}^{t} \xi \cdot \nabla_x f(r, x+(r-t)\xi)dr.\end{aligned}$$

On a donc

$$\partial_t u(t,x) = -\xi \cdot \nabla g(x-t\xi) + f(t,x) - \int_{r=0}^{t} \xi \cdot \nabla_x f(r, x+(r-t)\xi)dr$$

et

$$\nabla_x u(t,x) = \nabla g(x-t\xi) + \int_{r=0}^{t} \nabla_x f(r, x+(r-t)\xi)dr$$

donc

$$u_t(t,x) + \xi \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x).$$

Enfin, $u(0,x) = g(x)$ de manière évidente.

Exercice 3.2.

1. Si $\widetilde{u}(t) = u(x(t))$, alors

$$\widetilde{u}'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x(t))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t)),$$

et donc

$$\widetilde{u}'(t) + b(x(t))\widetilde{u}(t) = c(x(t)).$$

(2) est claire.

2. On cherche à résoudre $u_t + \xi \cdot \nabla u = f$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $u(0,x) = g(x)$. Pour cela, on cherche à résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ \nabla x(s) = \xi \end{cases}$$

avec $t(0) = 0$ et $x(0) = X \in \mathbb{R}^n$. Cela nous donne $t(s) = s$ et $x(s) = X + \xi s$. Si on pose $\widetilde{u}(s) = u(t(s), x(s))$, on a $\widetilde{u}'(s) = f(t(s), x(s))$ avec $\widetilde{u}(0) = g(X)$. On a donc

$$\widetilde{u}(s) = \int_{\sigma=0}^{s} f(t(\sigma), x(\sigma))d\sigma + g(X).$$

donc

$$u(s, X + \xi s) = \int_{\sigma=0}^{s} f(t(\sigma), x(\sigma))d\sigma + g(X).$$

Posons $t = s, x = X + \xi s$, on a

$$u(t,x) = \int_{\sigma=0}^{t} f(\sigma, x + \xi(\sigma - t))d\sigma + g(x - \xi t).$$

3. On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On commence par résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = 1 \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, 0)$, ce qui nous donne

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^t \\ y(t) = y_0 e^{2t} \\ z(t) = t \end{cases}$$

Or $\widetilde{u}'(t) = 3\widetilde{u}(t)$ et $\widetilde{u}(0) = \phi(x_0, y_0)$ donc $\widetilde{u}(t) = \phi(x_0, y_0)e^{3t}$. On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tous $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$u(x_0 e^t, y_0 e^{2t}, t) = \phi(x_0, y_0)e^{3t}.$$

En posant $X = x_0e^t$, $Y = y_0e^{2t}$ et $Z = t$, on a $x_0 = Xe^{-Z}$ et $y_0 = Ye^{-2Z}$, donc

$$u(X, Y, Z) = \phi(Xe^{-Z}, Ye^{-2Z})e^{3Z}.$$

Il reste à vérifier que l'expression

$$u(x, y, z) = \phi(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z}$$

qui définit bien une fonction sur $\mathbb{R}^3$ est bien solution de l'équation avec les conditions initiales proposées. On a bien $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$. Enfin,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{2z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{z},$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (-xe^{-z})\frac{\partial \phi}{\partial x}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z} + (-2ye^{-2z})\frac{\partial \phi}{\partial y}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z} + 3\phi(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z}.$$

En reportant les expressions trouvées, on voit que la fonction u vérifie bien l'équation aux dérivées partielles proposée.

On se fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère la solution $(x(t), y(t))$ du système

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ y'(t) = y^2(t) \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0)) = (x_0, 2x_0)$. La solution est donnée par

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{x_0}{1 - x_0t}, \frac{2x_0}{1 - 2x_0t}\right).$$

Si

$$\widetilde{u}(t) = u\left(\frac{x_0}{1 - x_0t}, \frac{2x_0}{1 - 2x_0t}\right),$$

alors $\widetilde{u}'(t) = \widetilde{u}^2(t)$ et $\widetilde{u}(0) = 1$. On a donc

$$\widetilde{u}(t) = \frac{1}{1 - t},$$

soit encore

$$u\left(\frac{x_0}{1-x_0t}, \frac{2x_0}{1-2x_0t}\right) = \frac{1}{1-t}.$$

Si on pose

$$(x,y) = \left(\frac{x_0}{1-x_0t}, \frac{2x_0}{1-2x_0t}\right),$$

alors

$$\begin{cases} \frac{1}{x_0} - t = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{2x_0} - t = \frac{1}{y} \end{cases}$$

ce qui implique que $(x_0, t) = \left(\frac{1}{2}\frac{xy}{y-x}, \frac{y-2x}{xy}\right)$, donc

$$u(x,y) = \frac{xy}{xy - y + 2x}.$$

On vérifie directement que cette solution est exacte en remplaçant u par son expression dans l'équation aux dérivées partielles.

Exercice 3.3. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial r}{\partial x_i}\phi'(r)$ et $\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r}$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \dfrac{\phi'(r)}{r} - x_i\dfrac{\frac{\partial r}{\partial x_i}}{r^2}\phi'(r) + \dfrac{x_i}{r}\dfrac{\partial r}{\partial x_i}\phi''(r) = \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{x_i^2}{r^3}\right)\phi'(r) + \dfrac{x_i^2}{r^2}\phi''(r)$. Et donc $\Delta f = \left(\dfrac{n}{r} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^2}{r^3}\right)\phi'(r) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^2}{r^2}\phi''(r) = \phi''(r) + \dfrac{n-1}{r}\phi'(r)$.

Exercice 3.4. Sous les hypothèses précédentes, $\Delta f = 0$ si et seulement si $\phi''(r) + \dfrac{n-1}{r}\phi'(r) = 0$ soit si et seulement si $r^{n-1}\phi''(r) + (n-1)r^{n-2}\phi'(r) = 0$ ce qui équivaut à $\left(r^{n-1}\phi'(r)\right)' = 0$. Comme $]0, +\infty[$ est connexe, ceci équivaut au fait que $r^{n-1}\phi'(r)$ est une constante a. Si $n > 2$, alors $\phi'(r) = \dfrac{a}{r^{n-1}}$ et donc par intégration $\phi(r) = \dfrac{a'}{r^{n-2}} + b$ où a' et b sont des constantes. Si $n = 2$, alors $\phi(r) = a\ln r + b$ où b est une constante.

Exercice 3.5. La seconde formule a été prouvée dans l'exercice 1.16. Prouvons la première. On applique pour cela le théorème de la divergence pour $F = v\nabla u$. On a div $F(x) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$ d'où le résultat.

Si on applique la première formule de Green pour u harmonique et $v = 1$, alors $\Delta u = 0$ et $\nabla v = 0$ d'où le corollaire.

Exercice 3.6. Si $n > 2$, on applique la formule de Green-Riemann avec u notre fonction harmonique, $v(y) = \|y\|^{2-n}$ et $\Omega = B_r(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$. D'après le corollaire 2.1.2, v est aussi harmonique donc

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)dx = 0.$$

On a donc

$$\int_{\partial\Omega} (v\partial_{\vec{n}} u - u\partial_{\vec{n}} v)d\sigma = \int_{S_r(0)} (v\partial_{\vec{n}} u - u\partial_{\vec{n}} v)d\sigma - \int_{S_\varepsilon(0)} (v\partial_{\vec{n}} u - u\partial_{\vec{n}} v)d\sigma = 0.$$

Comme v est constante sur $S_\varepsilon(0)$ et $S_r(0)$, les intégrales portant sur $v\partial_{\vec{n}} u$ valent 0 d'après le corollaire 2.2.2. On obtient donc

$$\int_{S_r(0)} u\partial_{\vec{n}} v d\sigma - \int_{S_\varepsilon(0)} u\partial_{\vec{n}} v d\sigma = 0.$$

Or $\partial_{\vec{n}} v = \dfrac{\partial}{\partial r} r^{2-n} = (2-n)r^{1-n}$ donc

$$\frac{1}{r^{1-n}} \int_{S_r(0)} u(y)d\sigma(y) = \frac{1}{\varepsilon^{1-n}} \int_{S_\varepsilon(0)} u(y)d\sigma(y) = \int_{\mathbb{S}_n} u(\varepsilon y)d\sigma_n(y) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \omega_n u(0).$$

La preuve pour $n = 2$ est totalement analogue.

Exercice 3.7. On passe en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)dy &= \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{\rho=0}^{r} \int_{S_\rho(x)} u(y)\rho^{n-1} d\sigma(y)d\rho \\ &= \frac{n}{r^n\omega_n} \int_{\rho=0}^{r} \rho^{n-1}\omega_n u(x)d\rho = \frac{nu(x)}{r^n}\frac{r^n}{n} = u(x) \end{aligned}$$

On a aussi Vol $B_r(x) = \dfrac{\omega_n r^n}{n}$ (*cf.* Exercice 1.6) d'où la seconde égalité. Enfin, en posant $y = x + rz$ dans la seconde intégrale, on a $dy = r^n dz$ et $\dfrac{r^n}{\text{Vol } B_r(x)} = \dfrac{1}{\text{Vol } \mathbb{B}_n}$, d'où la troisième égalité.

Exercice 3.8.

1. On prend ψ de classe C^∞, positive, valant 1 dans un voisinage de 0 et à support compact dans $[-1, 1]$. $\phi(x)$ est C^∞ car ϕ est C^∞ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et ϕ est constante et égale à 1 dans un voisinage de 0 donc de classe C^∞

dans ce voisinage. Il est clair que ϕ est à support compact. Si $a = \int \phi$ alors $a > 0$ et la fonction $\dfrac{1}{a}\phi$ vérifie les conditions requises.

2. On a $\|x\| > \varepsilon$ implique $\phi_\varepsilon(x) = 0$ donc $\|y-x\| > \varepsilon$ implique $\phi_\varepsilon(x-y) = 0$ donc le support de $y \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ est inclus dans $\overline{B_\varepsilon(x)}$. Le support de $y \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ est donc inclus dans Ω si $x \in \Omega_\varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}\int u(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = \int u(x-y)\phi_\varepsilon(y)dy = \int u(x-y)\varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}y)dy \\ = \int u(x-\varepsilon y)\phi(y)dy = \int_{\mathbb{B}_n} u(x-\varepsilon y)\psi(\|y\|)dy \\ = \int_{r=0}^{1}\int_{\zeta\in\S_n} u(x-r\varepsilon\zeta)\psi(r)r^{n-1}d\sigma_n(\zeta)dr\end{aligned}$$

D'après la formule de la moyenne, on a

$$\int_{\zeta\in\S_n} u(x-r\varepsilon\zeta) = \omega_n u(x),$$

et donc le terme précédent vaut

$$\left(\int_{r=0}^{1}\psi(r)r^{n-1}dr\right)\omega_n u(x).$$

Or

$$1 = \int \psi = \int_{\mathbb{B}_n}\psi = \int_{r=0}^{1}\psi(r)r^{n-1}\omega_n dr,$$

d'où le résultat. La fonction $x \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ est C^∞ et toutes les dérivées par rapport à x sont à support compacts. Si K est un compact de Ω_ε, alors le support de $y \mapsto \partial^\alpha\phi(x-y)$ est inclus dans $K_\varepsilon = K + \overline{B_\varepsilon(0)}$ qui est un compact de Ω. Si $M = \sup_{y\in\mathbb{R}}|\partial^\alpha\phi_e|$, alors

$$\forall x \in K, \qquad |\partial^\alpha\phi_e(y-x)| \le M\mathbb{1}_{K_\varepsilon}(y).$$

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on en déduit que u est de classe C^∞.

3. L'application $r \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial r}(x+ry)$ est localement bornée si $r < r_0$ par $\sup_{B_{r_0}(x)}|u|$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Dérivons par rapport à r l'égalité de la valeur moyenne

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\S_n} u(x+ry)d\sigma_n(y).$$

Nous obtenons
$$0 = \frac{1}{\omega_n} \int_{\S_n} \frac{\partial u}{\partial r}(x+ry)d\sigma_n(y).$$
Calculons
$$\int_{S_r(x)} \partial_{\vec{n}} u \, d\sigma_n.$$
On a $\partial_{\vec{n}} u(z) = \nabla u(z) \cdot \left(\frac{z-x}{r}\right)$. donc
$$\int_{S_r(x)} \partial_{\vec{n}} u \, d\sigma_n = \int_{z \in S_r(x)} \nabla u(z) \cdot \left(\frac{z-x}{r}\right) d\sigma_n(z)$$
$$= \int_{\S_n} \nabla u(x+ry) \cdot y r^{n-1} d\sigma_n(y) = \int_{\S_n} \frac{\partial}{\partial r} u(x+ry) d\sigma_n(y).$$
Il reste à vérifier que
$$\int_{B_r(x)} \Delta u = \int_{S_r(x)} \partial_{\vec{n}} u d\sigma_n.$$
Cela découle de la formule de Green prise avec $v = 1$ et u la fonction précédente.
L'intégrale de Δu est donc nulle sur toute boule, donc $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^n$. En effet, supposons Δu non nulle en un point $x > 0$. Quitte à changer u en $-u$, on peut supposer que $\Delta u(x_0) > 0$. u est de classe C^∞ donc Δu est continue. Par continuité, il existe une boule $B_{x_0}(r)$ sur laquelle $\Delta u(x) \geq \frac{1}{2}\Delta u(x_0)$ et donc
$$\int_{B_{x_0}(r)} \Delta u(x) \geq \frac{1}{2} u(x_0) \text{Vol } B_r(x_0) > 0,$$
ce qui est absurde.

4. Toute fonction harmonique possède la propriété de la valeur moyenne donc est C^∞ d'après la question 2.

Exercice 3.9. Si B est vide alors, $u < A$ sur Ω. Supposons B non vide. L'ensemble B est l'image réciproque par l'application continue du singleton $\{A\}$ donc B est fermé. Montrons maintenant que B est ouvert. Soit $x_0 \in B$ et soit $r > 0$ tel que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Montrons $u(x) = A$ dans $B_r(x_0)$. Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe $x' \in B_r(x_0)$ tel que $u(x') < A$. Notons $r' = \|x' - x_0\|$. On a $r' > 0$, et x' appartient à la sphère de centre x_0 et de rayon r'. La fonction u est continue en x' et donc, si $\alpha \in]u(x'), A[$, il existe un voisinage V sur la sphère tel que, pour tout x dans V $u(x) \leq \alpha$. En particulier,

$$A = u(x_0) = \frac{1}{r'^{n-1}\omega_n} \int_{S_{r'}(x_0)} u(y)d\sigma(y) < A,$$

ce qui est contradictoire. On a donc

$$B_r(x_0) \subset B,$$

ce qui montre que B est ouvert. Comme Ω est connexe et que B est ouvert et fermé non vide, on a $B = \Omega$ donc $u \equiv A$.

Si $\bar{\Omega}$ est compact, u admet une borne supérieure atteinte dans $\bar{\Omega}$. Si celle-ci est atteinte sur $\partial\Omega$, il n'y a rien à prouver. Sinon, celle-ci est atteinte dans Ω en un point x_0. Soit U la composante connexe de Ω contenant x_0. D'après le principe du maximum, u est constante dans U donc dans $\bar{U}$ donc le sup de u est atteint aussi sur $\partial U \subset \partial\Omega$.

Si on applique le corollaire à $u_1 - u_2$, on a

$$\sup_{\bar{\Omega}}(u_1 - u_2) = \sup_{\partial\Omega}(u_1 - u_2) = 0$$

donc $u_1 - u_2 \leq 0$ dans Ω. En renversant les rôles de u_1 et u_2, on a aussi $u_2 - u_1 \leq 0$ dans Ω donc $u_1 = u_2$.

Exercice 3.10.

1. D'après le corollaire 2.2.4, on a

$$\begin{aligned}
u(x) - u(0) &= \frac{1}{\text{Vol } B_R(x)} \int_{B_R(x)} u(y)dy - \frac{1}{\text{Vol } B_R(0)} \int_{B_R(0)} u(y)dy \\
&= \frac{n}{R^n\omega_n} \left(\int_{B_R(x)} u(y)dy - \int_{B_R(0)} u(y)dy \right) \\
&= \frac{n}{R^n\omega_n} \int_D u(y)dy
\end{aligned}$$

où D est la différence symétrique des domaines $B_R(x)$ et $B_R(0)$, c'est-à-dire que $D = (B_R(x) \cup B_R(0)) \setminus (B_R(x) \cap B_R(0))$. Et donc

$$|u(x) - u(0)| \leq \frac{n}{R^n\omega_n} \|u\|_\infty \text{Vol } D.$$

2. Si $y \in D$, alors soit y est dans $B_R(0)$ et pas dans $B_R(x)$, ce qui implique que

$$\|y\| < R \leq R + \|x\|$$

et $\|y-x\| \geq R$ soit encore $R \leq \|y-x\| \leq \|y\| + \|x\|$ donc

$$R - \|x\| \leq \|y\|;$$

ou alors soit y est dans $B_R(x)$ et pas dans $B_R(0)$ ce qui implique que $\|y-x\| < R$ donc que $\|y\| < \|x\| + R$ et $\|y\| \geq R \geq R - \|x\|$.
On en déduit que D est inclus dans l'ensemble des y tels que

$$R - \|x\| \leq \|y\| < R + \|x\|.$$

Le volume de la boule de centre 0 et de rayon $R+\|x\|$ est $\frac{\omega_n}{n}(R+\|x\|)^n$ et le volume de la boule de centre 0 et de rayon $R-\|x\|$ est $\frac{\omega_n}{n}(R-\|x\|)^n$.
Donc

$$\text{Vol } D \leq \frac{\omega_n}{n}((R+\|x\|)^n - (R-\|x\|)^n),$$

et

$$|u(x) - u(0)| \leq \|u\|_\infty \frac{(R+\|x\|)^n - (R-\|x\|)^n}{R^n}.$$

Faisant tendre R vers $+\infty$, le membre de droite tend vers 0 donc $u(x) = u(0)$, ce qui montre que u est constante.

Exercice 3.11.

1. On a

$$u(x_0) = \frac{1}{\text{Vol } \mathbb{B}_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy,$$

donc

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{\text{Vol } \mathbb{B}_n r^n} \int_{B_r(x_0)} |u|.$$

2. Les dérivées de u sont encore harmoniques, donc

$$\partial_i u(0) = \frac{2^n}{r^n \text{Vol } \mathbb{B}_n} \int_{B_{r/2}(0)} \partial_i u dx.$$

Utilisons l'identité de Green

$$\int_S u\, \partial_{\vec{n}} v\, d\sigma = \int_\Omega (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

avec $\Omega = B_{r/2}(0)$, $v = x_i$. Le membre de droite vaut

$$\int_{B_{r/2}(0)} \partial_i u\, dx,$$

tandis que celui de gauche vaut

$$\int_{S_{r/2}(0)} u\frac{2x_i}{r}d\sigma.$$

3. Si x est un point de $S_{r/2}(0)$ alors,

$$|u(x)| \leq \frac{2^n}{\text{Vol }\mathbb{B}_n r^n}\int_{B_{r/2}(x)}|u| \leq \frac{2^n}{\text{Vol }\mathbb{B}_n r^n}\int_{B_r(0)}|u|.$$

donc

$$\begin{aligned}
|\partial_i u(0)| &\leq \frac{2^n}{r^n\text{Vol }\mathbb{B}_n}\int_{S_{r/2}(0)}|u(x)|\left|\frac{2x_i}{r}\right|d\sigma \\
&\leq \frac{2^n}{r^n\text{Vol }\mathbb{B}_n}\frac{2^n}{\text{Vol }\mathbb{B}_n r^n}\int_{B_r(0)}|u|\int_{S_{r/2}(0)}\left|\frac{2x_i}{r}\right|d\sigma \\
&\leq \frac{2^n}{r^n\text{Vol }\mathbb{B}_n}\frac{2^n}{\text{Vol }\mathbb{B}_n r^n}\int_{B_r(0)}|u|\sigma(S_{r/2}(0)) \\
&= \frac{2^{n+1}n}{\text{Vol }\mathbb{B}_n r^{n+1}}\int_{B_r(0)}|u|
\end{aligned}$$

car $\sigma(S_{r/2}(0)) = \dfrac{r^{n-1}}{2^{n-1}}\omega_n = \dfrac{r^{n-1}}{2^{n-1}}\text{Vol }\mathbb{B}_n$, d'où le résultat pour $k = 1$.

4. Supposons que, pour les multi-indices α de longeur k,

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}}\int_{B_r(x_0)}|u|.$$

avec

$$C_k = \frac{(2^{2n+1+\frac{k+1}{2}}n)^k}{2^{n+1}\text{Vol }\mathbb{B}_n}.$$

(il y avait une erreur dans l'énoncé de l'exercice). Comme $\partial^\alpha u$ est encore harmonique, si $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$|\partial_i\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_1 2^{n+1}}{r^{n+1}}\int_{B_{r/2}(x_0)}|\partial^\alpha u(x)|dx$$

Or pour tout $x \in B_{r/2}(x_0)$, la boule $B_{r/2}(x)$ est incluse dans $B_r(x_0)$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\forall x \in B_{r/2}(x_0), \quad |\partial^\alpha u(x)| \leq \frac{C_k 2^{n+k}}{r^{n+k}}\int_{B_{r/2}(x)}|u| \leq \frac{C_k 2^{n+k}}{r^{n+k}}\int_{B_r(x_0)}|u|,$$

on a

$$\begin{aligned}|\partial_i\partial^\alpha u(x_0)| &\leq \frac{C_1 2^{n+1}}{r^{n+1}}\frac{C_k 2^{n+k}}{r^{n+k}}\text{Vol } B_{r/2}(x_0)\int_{B_r(x_0)}|u| \\ &\leq \frac{C_1 C_k \text{Vol } \mathbb{B}_n 2^{n+k+1}}{r^{n+k+1}}\int_{B_r(x_0)}|u|.\end{aligned}$$

Or

$$C_1 C_k \text{Vol } \mathbb{B}_n 2^{n+k+1} = \frac{2^{n+1}n}{\text{Vol } \mathbb{B}_n}\frac{(2^{2n+1+\frac{k+1}{2}}n)^k}{2^{n+1}\text{Vol } \mathbb{B}_n}(\text{Vol } \mathbb{B}_n)2^{n+k+1} = C_{k+1}.$$

d'où le résultat.

5. Si u est bornée, et si $x \in \mathbb{R}^n$ est quelconque, alors

$$|\partial_i u(x)| \leq \frac{C_1}{r^{n+1}}\|u\|_\infty \text{Vol } (B_r(x)) \leq \frac{2^{n+1}n}{r}\|u\|_\infty \longrightarrow_{r\to+\infty} 0.$$

Les dérivées de u sont donc toutes nulles, ce qui implique que u est constante.

Exercice 3.12.

1. Montrons tout d'abord que la fonction E est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$, ce qui prouvera qu'elle définit une distribution. Soit $R > 0$. En passant en coordonnées polaires, on a

$$\int_{B_R(0)}|E(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}|\ln r|r\,dr\,d\theta = \int_{r=0}^{R}|\ln r|r\,dr$$

qui est une intégrale finie puisque la fonction $x\ln x$ se prolonge par continuité en $0+$.

Pour $\varepsilon > 0$, la fonction E_ε est C^∞ donc définit une distribution. Pour montrer que E_ε tend vers E au sens des distributions, il suffit de montrer que, si φ est une fonction C^∞ à support compact,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}E_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2}E(x)\varphi(x)dx$$

Pour cela, on remarque que la famille de fonctions $E_\varepsilon(x)\varphi(x)$ tend simplement vers $E(x)\varphi(x)$ quand $\varepsilon \to 0$. Pour conclure en utilisant le théorème de la convergence dominée, il suffit de prouver qu'il existe une fonction F intégrable sur $\mathbb{R}^2$ telle que,

$$\forall\varepsilon \in]0,1[, \qquad |E_\varepsilon(x)\varphi(x)| \leq F(x).$$

Si $\|x\|^2+\varepsilon^2 \geq 1$, alors $|\ln(\|x\|^2+\varepsilon^2)| = \ln(\|x\|^2+\varepsilon^2) \leq \ln(\|x\|^2+1)$. Si $\|x\|^2+\varepsilon^2 \leq 1$, alors $|\ln(\|x\|^2+\varepsilon^2)| = -\ln(\|x\|^2+\varepsilon^2) = \ln\left(\frac{1}{\|x\|^2+\varepsilon^2}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right)$. Donc, si on pose

$$\begin{aligned}F(x) &= |\varphi(x)|\left(\ln(\|x\|^2+1)+\left|\ln\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right)\right|\right)\\ &= |\varphi(x)|\left(\ln(\|x\|^2+1)+2|\ln\|x\||\right),\end{aligned}$$

comme φ est à support compact, il suffit, puisque $\varphi(x)\ln(1+\|x\|^2)$ est à support compact et borné, de montrer que

$$\varphi(x)\ln\|x\|$$

est intégrable pour avoir le résultat. Or, cela découle du fait que E est localement intégrable.

2. E_ε est C^∞ donc ΔE_ε au sens des distributions est la distribution attachée à la fonction ΔE_ε. On a

$$\frac{\partial E_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x_i}{\|x\|^2+\varepsilon^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 E_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\|x\|^2-2x_i^2+\varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^2},$$

donc

$$\Delta E_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\|x\|^2-2x_1^2+\varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{\|x\|^2-2x_2^2+\varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^2}.$$

3. Comme E_ε tend vers E au sens des distributions, on en déduit que ΔE_ε tend vers ΔE au sens des distributions. Calculons donc la limite de ΔE_ε au sens des distributions. Soit φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ à support compact.

$$\begin{aligned}\int E_\varepsilon(x)\varphi(x)dx &= \frac{1}{\pi}\int \frac{\varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^2}\varphi(x)dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}\varphi(\varepsilon y)dy \quad \text{(en posant } x=\varepsilon y)\end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers 0. La suite de fonctions

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}\varphi(\varepsilon y)$$

converge simplement vers

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}\varphi(0).$$

De plus, si M est la borne supérieure de $|\varphi|$, on a

$$\left|\frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}\varphi(\varepsilon y)\right| \leq \frac{M}{(\|y\|^2+1)^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ puisque

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^2} \leq \frac{1}{\|y\|^4}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_2$ d'après l'exercice 1.9. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int E_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \frac{\varphi(0)}{\pi}\int \frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}dy$$

En passant en coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int \frac{1}{(\|y\|^2+1)^2}dy = \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r^2+1)^2}r\,dr\,d\theta \\ = \int_{r=0}^{\infty}\frac{2r}{(r^2+1)^2}\,dr = \int_{u=0}^{\infty}\frac{du}{(u+1)^2} = 1,\end{aligned}$$

donc $\langle \Delta E, \varphi\rangle = \varphi(0)$ ce qui implique que $\Delta E = \delta_0$.

4. On reprend la même démarche avec

$$E_\varepsilon(x) = \frac{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^{(2-n)/2}}{(2-n)\omega_n}.$$

Montrons tout d'abord que la fonction E est localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, ce qui prouvera qu'elle définit une distribution. Soit $R > 0$. En passant en coordonnées sphériques, on a

$$\int_{B_R(0)}|E(x)|dx = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\omega_n\int_{r=0}^{R} r^{2-n}r^{n-1}\,dr = \frac{1}{2-n}\frac{R^2}{2}$$

qui est une intégrale finie.

Pour $\varepsilon > 0$, la fonction E_ε est C^∞ donc définit une distribution. Pour montrer que E_ε tend vers E au sens des distributions, il suffit de montrer que, si φ est une fonction C^∞ à support compact,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^2} E_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} E(x)\varphi(x)dx$$

Pour cela, on remarque que la famille de fonctions $E_\varepsilon(x)\varphi(x)$ tend simplement vers $E(x)\varphi(x)$ quand $\varepsilon \to 0$. Pour conclure en utilisant le théorème de la convergence dominée, il suffit de remarquer que

$$\forall \varepsilon \in]0,1[, \qquad |E_\varepsilon(x)\varphi(x)| \leq \frac{1}{(2-n)\omega_n}(\|x\|^2+1)^{(2-n)/2}|\varphi(x)|$$

et que la fonction

$$x \mapsto (\|x\|^2+1)^{(2-n)/2}|\varphi(x)|$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

E_ε est C^∞ donc ΔE_ε au sens des distributions est la distribution attachée à la fonction ΔE_ε. On a

$$\frac{\partial E_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\omega_n}\frac{x_i}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^{n/2}}$$

et

$$\frac{\partial^2 E_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \frac{1}{\omega_n}\frac{\|x\|^2 - nx_i^2 + \varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^{n/2+1}},$$

donc

$$\Delta E_\varepsilon(x) = \frac{n}{\omega_n}\frac{\varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^{n/2+1}}.$$

Comme E_ε tend vers E au sens des distributions, on en déduit que ΔE_ε tend vers ΔE au sens des distributions. Calculons donc la limite de ΔE_ε au sens des distributions. Soit φ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ à support compact.

$$\begin{aligned}\int E_\varepsilon(x)\varphi(x)dx &= \frac{n}{\omega_n}\int \frac{\varepsilon^2}{(\|x\|^2+\varepsilon^2)^{n/2+1}}\varphi(x)dx \\ &= \frac{n}{\omega_n}\int \frac{1}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}}\varphi(\varepsilon y)dy \quad \text{(en posant } x = \varepsilon y)\end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers 0. La suite de fonctions

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}}\varphi(\varepsilon y)$$

converge simplement vers

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}}\varphi(0).$$

De plus, si M est la borne supérieure de $|\varphi|$, on a

$$\left|\frac{1}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}}\varphi(\varepsilon y)\right| \leq \frac{M}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ puisque

$$\frac{1}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}} \leq \frac{1}{(\|y\|^2)^{n/2+1}} = \frac{1}{\|y\|^{n+2}}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_n$ d'après l'exercice 1.9. On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int E_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \frac{n\varphi(0)}{\omega_n}\int \frac{1}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}}dy.$$

En passant en coordonnées sphériques, on a

$$\begin{aligned}\frac{n}{\omega_n}\int \frac{1}{(\|y\|^2+1)^{n/2+1}}dy &= n\int_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(r^2+1)^{n/2+1}}r^{n-1}\,dr \\ &= \frac{n}{2}\int_{r=0}^{\infty}\left(\frac{r^2}{r^2+1}\right)^{n/2-1}\frac{2rdr}{(r^2+1)^2} = \frac{n}{2}\int_{u=0}^{1}u^{n/2-1}du = 1,\end{aligned}$$

en posant $u = \frac{r^2}{r^2+1}$ et donc $\langle \Delta E, \varphi\rangle = \varphi(0)$ ce qui implique que $\Delta E = \delta_0$.

Exercice 3.13. La méthode sera différente dans le cas $n = 2$. Introduisons E_ε à la place de E. On a

$$f * E_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\int f(y)\ln(\|y-x\|^2+\varepsilon^2)dy$$

et

$$f * E(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(y)\ln\|y-x\|dy,$$

et ces intégrales sont bien définies pour presque tout x. En effet, pour la première intégrale, il découle du fait

$$\lim_{\|y\|\to+\infty}\frac{\ln(\|y-x\|^2+\varepsilon^2)}{\ln(\|y\|^2)} = 1.$$

qu'il existe une constante C dépendant de x et ε telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_2, \qquad \ln(\|y-x\|^2+\varepsilon^2) \leq C \ln \|y\|.$$

Il est alors clair que les intégrales

$$\int f(y) \ln(\|y-x\|^2+\varepsilon^2) dy$$

sont bien définies. Montrons à présent que l'intégrale

$$\int f(y) \ln \|y-x\| dy$$

est bien définie pour presque tout x. Si $y \notin B_{\|x\|+1}(0)$, on a $\|y-x\| \geq 1$ et $0 \leq \ln \|y-x\| \leq C \ln \|y\|$ où C est une constante dépendant de x mais indépendante de y. Il reste donc à montrer que $\int_{B_{\|x\|+1}(0)} |f(y)| |\ln \|x-y\|| dy$ est finie. Il suffit pour cela de montrer que $\int_{B_1(x)} |f(y)| |\ln \|x-y\|| dy$ est finie. Posons pour cela $\phi(y) = |\ln \|y\||$ si $\|y\| \leq 1$ et 0 sinon. On a

$$\int_{B_1(x)} |f(y)| |\ln \|x-y\|| dy = (|f| * \phi)(x),$$

qui est bien définie pour presque tout x car f et ϕ sont dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Pour montrer que $f * E_\varepsilon$ tend vers $f * E$ au sens des distributions, il suffit de montrer qu'il y a convergence dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\|x\|\leq R} \left| \int_{y\in\mathbb{R}^2} f(y)(\ln(\|y-x\|^2+\varepsilon^2) - \ln(\|y-x\|^2)) dy \right| dx \\
&\qquad \leq \int_{\|x\|\leq R} \int_{y\in\mathbb{R}^2} |f(y)| |(\ln(\|y-x\|^2+\varepsilon^2) - \ln(\|y-x\|^2))| dy\, dx \\
&\qquad = \int_{\|x\|\leq R} \int_{y\in\mathbb{R}^2} |f(y)| \ln\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\|y-x\|^2}\right) dy\, dx. \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de la convergence dominée, il suffit de montrer que

$$\int_{\|x\|\leq R} \int_{y\in\mathbb{R}^2} |f(y)| \ln\left(1 + \frac{1}{\|y-x\|^2}\right) dy\, dx$$

est finie. On remarque, pour cela, que si $\|x-y\| \leq 1$, alors $\ln\left(1+\frac{1}{\|y-x\|^2}\right) \leq \ln 2 - 2\ln\|y-x\|$ tandis que si $\|x-y\| \geq 1$ alors $\ln\left(1+\frac{1}{\|y-x\|^2}\right) \leq \ln 2$. Il suffit donc de montrer que

$$\int_{\|x\|\leq R}\int_{\|y-x\|\leq 1} |f(y)||\ln\|y-x\||dy$$

est finie pour conclure. Posons $\phi(x) = |\ln\|x\||$ si $\|x\| \leq 1$ et 0 sinon. Alors

$$\int_{x\in\mathbb{R}^2}\int_{y\in\mathbb{R}^2} |f(y)|\phi(y-x)dy\,dx = \|f\|_1\|\phi\|_1$$

est finie. D'où le résultat.

On a donc $\Delta(f*E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(f*E_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} f*\Delta E_\varepsilon$. Il reste donc à montrer que,

$$\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(f*\Delta E_\varepsilon)(x)$$

pour conclure, ou encore que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f - f*\Delta E_\varepsilon\|_1 = 0.$$

Or

$$\|f - f*\Delta E_\varepsilon\|_1 \leq \int_{y\in\mathbb{R}^2}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^2}|f(x-y)-f(x)|dx\right)\frac{\varepsilon^2}{(\|y\|^2+\varepsilon^2)^2}dy.$$

Un raisonnement identique à celui de la question 3 de l'exercice précédent montre que la limite du terme de droite dans l'inégalité précédente est exactement

$$\lim_{y\to 0}\|f(\cdot - y) - f\|_1,$$

si cette limite existe. Il reste donc à montrer que

$$\lim_{y\to 0}\|f(\cdot - y) - f\|_1 = 0$$

pour conclure. Pour cela, on sait que, si $\eta > 0$, il existe g continue sur $\mathbb{R}^2$ et à support compact telle que $\|g-f\|_1 \leq \eta$. On a alors $\|g(\cdot-y) - f(\cdot-y)\|_1 \leq \eta$. Le théorème de la convergence dominée nous donne $\lim_{y\to 0}\|g(\cdot-y)-g\|_1 = 0$. En effet, la fonction $g(\cdot - y)$ converge simplement vers g quand y tend vers

0. Et, si $\|y\| \leq 1$ et $K = \text{supp } g + \bar{\mathbb{B}}_2$, alors $|g(x-y) - g(x)| \leq 2M\mathbb{1}_K(x)$ où $M = \sup_{\mathbb{R}^2} |g|$. D'où le résultat. (Cet exercice était difficile, donc ne vous inquiétez pas si vous n'êtes pas arrivés à le faire).

Exercice 3.14. Puisque $x \in \Omega$, les fonctions $y \in S \mapsto E(x,y)$ sont bornées. Le théorème de la convergence dominée s'applique ici sans difficulté et on obtient

$$\int_S [u(y)\partial_{\vec{n},y}E(x,y) - \partial_{\vec{n}}u(y)E(x,y)]\, d\sigma(y)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_S [u(y)\partial_{\vec{n},y}E_\varepsilon(x,y) - \partial_{\vec{n}}u(y)E_e(x,y)]\, d\sigma(y).$$

Par la formule de Green, le dernier terme vaut

$$\int_\Omega [u(y)\Delta_y E_\varepsilon(x,y) - \Delta u(y)E_\varepsilon(x,y)]\, dy = \int_\Omega u(y)\Delta_y E_\varepsilon(x,y)dy.$$

Le même raisonnement que dans l'exercice 2.11 nous montre que cette dernière intégrale converge vers $u(x)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice 3.15. Reprenant l'exercice précédent, tout fonctionne de manière totalement identique, sauf que le terme

$$\int_\Omega \Delta u(y)E_\varepsilon(x,y)dy$$

ne disparaît pas et tend quand $\varepsilon \to 0$ vers

$$\int_\Omega \Delta u(y)E(x,y)dy.$$

La formule en découle.

Exercice 3.16. On a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\|^2 = \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y, \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\rangle = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} + \|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle$$
$$= 1 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle = \|x-y\|^2.$$

Exercice 3.17. La fonction de Green est

$$G(x,y) = E(x,y) - E(\frac{x}{\|x\|}, \|x\|y).$$

On a

$$\frac{\partial E}{\partial y_i}(x,y) = -\frac{(x_i - y_i)}{\omega_n \|x-y\|^n},$$

donc

$$\partial_{\vec{n},y} E(x,y) = \frac{\langle y - x, y\rangle}{\omega_n \|x-y\|^n}$$

et

$$\partial_{\vec{n},y} G(x,y) = \frac{\langle y - x, y\rangle}{\omega_n \|x-y\|^n} - \|x\| \frac{\langle y\|x\| - \frac{x}{\|x\|}, y\rangle}{\omega_n \|\frac{x}{\|x\|} - \|x\| y\|^n} = \frac{1 - \|x\|^2}{\omega_n \|x-y\|^n}.$$

Exercice 3.18. Non corrigé car facile.

Exercice 3.19.

1. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons le d'abord pour $n = 1$. Posons

$$\Phi(x,y,z) = \int_0^y v(x, z-\tau, \tau) d\tau.$$

On a

$$u(x,t) = \Phi(x,t,t)$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)(x,t,t).$$

On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,t,t) = v(x,0,t)$$

et une application aisée du théorème de dérivation sous le signe somme nous donne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,t,t) = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, t-\tau, \tau) d\tau.$$

La proposition est donc vraie au rang $n = 1$. Supposons la vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Si

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^{n-1} v}{\partial \tau^k \partial t^{n-1-k}}(x,0,t) + \int_0^t \frac{\partial^n v}{\partial t^n}(x, t-\tau, \tau) d\tau,$$

alors le même raisonnement que précédemment nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}}(x,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^n v}{\partial \tau^{k+1}\partial t^{n-1-k}}(x,0,t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \frac{\partial^n v}{\partial t^n}(x,t-\tau,\tau)d\tau\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^n v}{\partial \tau^{k+1}\partial t^{n-1-k}}(x,0,t) + \frac{\partial^n v}{\partial t^n}(x,0,t) \\
&+ \int_0^t \frac{\partial^{n+1} v}{\partial t^{n+1}}(x,t-\tau,\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^n v}{\partial \tau^{k}\partial t^{n-k}}(x,0,t) + \frac{\partial^n v}{\partial t^n}(x,0,t) \\
&+ \int_0^t \frac{\partial^{n+1} v}{\partial t^{n+1}}(x,t-\tau,\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^n v}{\partial \tau^{k}\partial t^{n-k}}(x,0,t) + \int_0^t \frac{\partial^{n+1} v}{\partial t^{n+1}}(x,t-\tau,\tau)d\tau
\end{aligned}$$

ce qui montre que le résultat est vrai au rang $n+1$. Le reste de la question est facile.

2. Si

$$P(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t^m} + \sum_{\beta=0}^{m-1}\sum_{\alpha} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$$

alors

$$\begin{aligned}
P(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})u(x,t) =& \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \tau^{k}\partial t^{m-1-k}}(x,0,t) + \int_0^t \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t-\tau,\tau)d\tau \\
&+ \int_0^t \sum_{\beta=0}^{m-1}\sum_{\alpha} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}(x,t-\tau,\tau)d\tau \\
=& f(x,t) + \int_0^t P(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})v(x,t-\tau,\tau)d\tau \\
=& f(x,t)
\end{aligned}$$

Exercice 3.20. Une solution explicite de

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(0,x) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|x-y\|^2}{4t}} g(y)dy.$$

Le principe de Duhamel nous dit que, si $v(x,t,\tau)$ est solution de

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(0,x,\tau) = f(x,\tau) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

en particulier si

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|x-y\|^2}{4t}} f(y,\tau)dy$$

alors

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t-\tau,\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|x-y\|^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)dydt$$

est solution de

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f(x,t) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(0,x,\tau) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Et donc une solution de

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f(x,t) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\\ u(0,x) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|x-y\|^2}{4t}} g(y)dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|x-y\|^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)dydt$$

Exercice 3.21. Posons $v(x,t) = u_t(x,t) + u_x(x,t)$. On a

$$v_t - v_x = f(x,t)$$

et

$$v(x,0) = u_t(x,0) + u_x(x,0) = h(x) + g'(x).$$

On a donc

$$v(x,t) = h(x+t) + g'(x+t) + \int_{r=0}^{t} f(x+t-r,r)dr.$$

On a maintenant

$$u_t + u_x = v(x,t)$$

et

$$u(x,0) = h(x)$$

donc

$$u(x,t) = h(x-t) + \int_{s=0}^{t} v(x+s-t,s)ds.$$

On a

$$v(x+s-t,s) = h(x+2s-t) + g'(x+2s-t) + \int_{r=0}^{s} f(x+2s-t-r)dr,$$

donc

$$u(x,t) = h(x-t) \\ + \int_{s=0}^{t} \left(h(x+2s-t) + g'(x+2s-t) + \int_{r=0}^{s} f(x+2s-t-r)dr \right) ds.$$

Exercice 3.22. Si on pose $z = x + ry$ avec $y \in \S_n$ alors

$$M_\phi(x,r) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} \phi(z)d\sigma(z) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\S_n} \phi(x+ry)d\sigma_n(y).$$

Le changement de variable $y \mapsto -y$ nous donne que

$$M_\phi(x,-r) = M_\phi(x,r).$$

Une application aisée du théorème de dérivation sous le signe somme nous montre que si ϕ est de classe C^k, alors $(x,r) \mapsto M_\phi(x,r)$ est aussi de classe C^k. Il est enfin clair que

$$M_\phi(\cdot,0) = \phi.$$

Exercice 3.23.

1. Le cas $r<0$ se déduit du cas $r>0$ par parité.

2. On a

$$\begin{aligned}\partial_r M_\phi(x,r) =& \frac{1}{\omega_n}\int_{\S_n} \nabla\phi(x+ry)\cdot y\ d\sigma_n(y)\\ =&\frac{1}{\omega_n}\int_{\S_n} \partial_{\vec{n},y}\phi(x+ry)\ d\sigma_n(y)\\ =&\frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{\|z\|=r} \partial_{\vec{n},z}\phi(x+z)\ d\sigma(z)\\ =&\frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{\|z\|\le r} \Delta\phi(x+z)\ dz.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}r^{n-1}\partial_r M_\phi(x,r) =& \frac{1}{\omega_n}\int_{\|z\|\le r} \Delta\phi(x+z)\ dz.\\ =&\frac{1}{\omega_n}\int_0^r\int_{\S_n} \Delta\phi(x+\rho y)\rho^{n-1}d\sigma_n(y)d\rho\end{aligned}$$

et donc

$$\partial_r(r^{n-1}\partial_r M_\phi(x,r)) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\S_n} \Delta\phi(x+ry)r^{n-1}d\sigma_n(y) = r^{n-1}\Delta_x M_\phi(x,r).$$

3. Evident.

Exercice 3.24. Si u est solution de l'équation des ondes, alors M_u est clairement solution de (6). Réciproquement, si M_u est solution de (6) alors, d'après la proposition 4.2.2, on a

$$\partial_t^2 M_u(x,r,t) - \Delta_x M_u(x,r,t) = 0.$$

Utilisant la formule de l'exercice 2.21, il est clair que

$$\partial_t^2 M_u(x,r,t) = M_{\partial_t^2 u}(x,r,t) \quad \text{et} \quad \Delta_x M_u(x,r,t) = M_{\Delta_x u}(x,r,t).$$

Enfin, en faisant $r=0$ et en utilisant l'exercice 2.21, on obtient

$$\partial_t^2 u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0.$$

Exercice 3.25.

1. Si $\phi(r) = r^m$ alors $r^{2k-1}\phi(r) = r^{2k-1+m}$ et

$$(r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\phi(r)] = (2k-1+m)(2k-3+m)(2k-5+m)\cdots(m+3)r^{m+1}$$

et

$$\begin{aligned}&\partial_r^2(r^{-1}\partial_r)^{k-1}[r^{2k-1}\phi(r)]\\ &\quad = (2k-1+m)(2k-3+m)(2k-5+m)\cdots(m+3)(m+1)mr^{m-1}\end{aligned}$$

On a $r^{2k}\phi'(r) = r^{2k+m-1}m$ et

$$\begin{aligned}&(r^{-1}\partial_r)^{k}[r^{2k}\phi'(r)]\\ &\quad = (2k-1+m)(2k-3+m)(2k-5+m)\cdots(m+3)(m+1)mr^{m-1}.\end{aligned}$$

2. Le lemme est donc vrai si $\phi(r) = (r - r_0)^m$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si on développe l'expression du membre de gauche et qu'on l'évalue en $r_0 \neq 0$, seules les dérivées de ϕ en r_0 dont l'ordre est inférieur à $k+1$ interviennent. De même pour le membre de droite. L'égalité (7) se réduit donc dans ce cas à l'égalité $0 = 0$.

3. Si ϕ est de classe C^1 et si $r_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi(r) = \phi(r_0) + \phi'(r_0)(r - r_0) + \cdots + \frac{\phi^k(r_0)}{k!}(r - r_0)^k + \psi(r).$$

L'égalité (7) est alors vraie en $r = r_0$ pour ψ d'après la question 2, et vraie pour $\phi - \psi$ d'après la question 1. Comme c'est vrai quel que soit $r_0 \neq 0$, on en déduit le lemme 4.2.4.

Exercice 3.26. Pour $k = 1$, c'est clair et $c_0^1 = 1$. Supposons

$$T_k(\phi)(r) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j^k r^{j+1}\phi^{(j)}(r).$$

On a

$$T_{k+1}(\phi)(r) = (r^{-1}\partial_r)T_k(r^2\phi(r)).$$

Or, l'hypothèse de récurrence nous donne

$$\begin{aligned}
T_k(r^2\phi(r)) =& c_0^k r^3\phi(r) + c_1^k r^2(2r\phi(r) + r^2\phi'(r)) \\
&+ \sum_{j=2}^{k-1} c_j^k r^{j+1}[r^2\phi^{(j)}(r) + 2jr\phi^{(j-1)}(r) + j(j-1)\phi^{(j-2)}] \\
=& c_0^k r^3\phi(r) + 2c_1^k r^3\phi(r) + r^4 c_1^k\phi'(r) + \sum_{j=2}^{k-1} c_j^k r^{j+3}\phi^{(j)}(r) \\
&+ \sum_{j=1}^{k-2} 2(j+1)c_{j+1}^k r^{j+3}\phi^{(j)}(r) \\
&+ \sum_{j=0}^{k-3} c_{j+2}^k (j+2)(j+1)r^{j+3}\phi^{(j)}(r)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(\phi)(r) =& 3c_0^k r\phi(r) + c_0^k r^2\phi'(r) + 6c_1^k r\phi(r) + 2c_1^k r^2\phi'(r) \\
&+ \sum_{j=2}^{k-1} c_j^k (j+3) r^{j+1}\phi^{(j)}(r) \\
&+ \sum_{j=2}^{k-1} c_j^k r^{j+2}\phi^{(j+1)}(r) \\
&+ \sum_{j=1}^{k-2} 2(j+1)c_{j+1}^k (j+3) r^{j+1}\phi^{(j)}(r) \\
&+ \sum_{j=1}^{k-2} 2(j+1)c_{j+1}^k r^{j+2}\phi^{(j+1)}(r) \\
&+ \sum_{j=0}^{k-3} c_{j+2}^k (j+2)(j+1)(j+3) r^{j+1}\phi^{(j)}(r) \\
&+ \sum_{j=0}^{k-3} c_{j+2}^k (j+2)(j+1) r^{j+2}\phi^{(j+1)}(r)
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien la proposition au rang $k+1$. Pour calculer c_0^k, il suffit de remarquer que $c_0^k r = T_k(1)(r)$. Or $T_k(1)(r) = 1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)r$.

Exercice 3.27. Il est clair que M_f et M_g sont paires en r. Il est alors clair que $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont des fonctions impaires de r, ce qui implique clairement que

$\partial_r \widetilde{f}$ est une fonction paire de r. On a

$$u(x,t) = \frac{1}{c_0} \lim_{r\to 0} \frac{1}{2} \frac{\widetilde{f}(x,t+r) - \widetilde{f}(x,t-r)}{r} + \frac{1}{c_0} \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} \widetilde{g}(x,s)ds$$

$$= \frac{1}{c_0} \left[(\partial_r \widetilde{f})(x,t) + \widetilde{g}(x,t) \right]$$

Le théorème en découle immédiatement.

Exercice 3.28. C'est clair.

Exercice 3.29. Sans difficulté.