CORRIGÉ DU DEVOIR N°1

Exercice 1.

1. Si $\tilde{u}(t) = u(x(t))$, alors

$$\tilde{u}'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t))x'_i(t) = \sum_{i=1}^n a_i(x(t)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t)),$$

et donc

$$\tilde{u}'(t) + b(x(t))\tilde{u}(t) = c(x(t)).$$

(2) est claire.

2. On cherche à résoudre $u_t + \xi \cdot \nabla u = f$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $u(0, x) = g(x)$. Pour cela, on cherche à résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ \nabla x(s) = \xi \end{cases}$$

avec $t(0) = 0$ et $x(0) = X \in \mathbb{R}^n$. Cela nous donne $t(s) = s$ et $x(s) = X + \xi s$. Si on pose $\tilde{u}(s) = u(t(s), x(s))$, on a $\tilde{u}'(s) = f(t(s), x(s))$ avec $\tilde{u}(0) = g(X)$. On a donc

$$\tilde{u}(s) = \int_{\sigma=0}^s f(t(\sigma), x(\sigma))d\sigma + g(X).$$

donc

$$u(s, X + \xi s) = \int_{\sigma=0}^s f(t(\sigma), x(\sigma))d\sigma + g(X).$$

Posons $t = s, x = X + \xi s$, on a

$$u(t, x) = \int_{\sigma=0}^t f(\sigma, x + \xi(\sigma - t))d\sigma + g(x - \xi t).$$

3. On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On commence par résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = 1 \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, 0)$, ce qui nous donne

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^t \\ y(t) = y_0 e^{2t} \\ z(t) = t \end{cases}$$

Or $\tilde{u}'(t) = 3\tilde{u}(t)$ et $\tilde{u}(0) = \phi(x_0, y_0)$ donc $\tilde{u}(t) = \phi(x_0, y_0)e^{3t}$. On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tous $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$u(x_0e^t, y_0e^{2t}, t) = \phi(x_0, y_0)e^{3t}.$$

En posant $X = x_0e^t$, $Y = y_0e^{2t}$ et $Z = t$, on a $x_0 = Xe^{-Z}$ et $y_0 = Ye^{-2Z}$, donc

$$u(X, Y, Z) = \phi(Xe^{-Z}, Ye^{-2Z})e^{3Z}.$$

Il reste à vérifier que l'expression

$$u(x, y, z) = \phi(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z}$$

qui définit bien une fonction sur $\mathbb{R}^3$ est bien solution de l'équation avec les conditions initiales proposées. On a bien $u(x, y, 0) = \phi(x, y)$. Enfin,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{2z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^z,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= (-xe^{-z})\frac{\partial \phi}{\partial x}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z} + (-2ye^{-2z})\frac{\partial \phi}{\partial y}(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z} \\ &\quad + 3\phi(xe^{-z}, ye^{-2z})e^{3z}. \end{aligned}$$

En reportant les expressions trouvées, on voit que la fonction u vérifie bien l'équation aux dérivées partielles proposée.

On se fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère la solution $(x(t), y(t))$ du système

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ y'(t) = y^2(t) \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0)) = (x_0, 2x_0)$. La solution est donnée par

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{x_0}{1 - x_0t}, \frac{2x_0}{1 - 2x_0t} \right).$$

Si

$$\tilde{u}(t) = u \left(\frac{x_0}{1 - x_0t}, \frac{2x_0}{1 - 2x_0t} \right),$$

alors $\tilde{u}'(t) = \tilde{u}^2(t)$ et $\tilde{u}(0) = 1$. On a donc

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{1-t},$$

soit encore

$$u\left(\frac{x_0}{1-x_0t}, \frac{2x_0}{1-2x_0t}\right) = \frac{1}{1-t}.$$

Si on pose

$$(x, y) = \left(\frac{x_0}{1-x_0t}, \frac{2x_0}{1-2x_0t}\right),$$

alors

$$\begin{cases} \frac{1}{x_0} - t = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{2x_0} - t = \frac{1}{y} \end{cases}$$

ce qui implique que $(x_0, t) = \left(\frac{1}{2} \frac{xy}{y-x}, \frac{y-2x}{xy}\right)$, donc

$$u(x, y) = \frac{xy}{xy - y + 2x}.$$

On vérifie directement que cette solution est exacte en remplaçant u par son expression dans l'équation aux dérivées partielles.

Exercice 2. Tout d'abord, si $c = a + ib$, alors $\left|\frac{1}{\|x\|}e^{-c\|x\|}\right| \leq \frac{1}{\|x\|}e^{-a\|x\|}$. qui est localement intégrable sur $\mathbb{R}^3$, ce qui montre que cette expression définit bien une distribution. Définissons la famille de fonctions de classe C^∞

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$|f_\varepsilon(x)\varphi(x)| \leq \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-a\|x\|} |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^3)$$

Comme f_ε tend simplement presque partout quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la fonction

$$f(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-c\|x\|},$$

on en déduit que la famille de fonctions f_ε tend vers f au sens des distributions, et donc que

$$-\Delta f + c^2 f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\Delta f_\varepsilon + c^2 f_\varepsilon)$$

(limite au sens des distributions). Un calcul direct nous donne, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{x_i}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{cx_i}{\|x\|^2 + \varepsilon^2} \right] e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}$$

et donc

$$\Delta f_\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{3\varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{3c\varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^2} + \frac{c^2\|x\|^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \right] e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Nous avons

$$\begin{aligned} 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta f_\varepsilon + c^2 f_\varepsilon) \varphi(x) dx &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{3\varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \varphi(x) dx}_{(1)} \\ &+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{3c\varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^2} e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \varphi(x) dx}_{(2)} \\ &- \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{c^2\|x\|^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \varphi(x) dx}_{(3)} \\ &+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{c^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \varphi(x) dx}_{(4)} \end{aligned}$$

Comme pour la solution fondamentale du laplacien, le terme (1) tend quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers $\varphi(0)$. En ce qui concerne (2), si on suppose que $\varepsilon \leq 1$, et si $\text{supp } \varphi \subset B_R(0)$ et $M = \|\varphi\|_\infty$, alors

$$\left| e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \varphi(x) \right| \leq e^{|c|(R^2+1)^{1/2}} M$$

et donc, en posant $x = \varepsilon u$, on a

$$(2) \leq e^{|c|(R^2+1)^{1/2}} M \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3c\varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^2} dx = e^{|c|(R^2+1)^{1/2}} M \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3c\varepsilon}{(\|u\|^2 + 1)^2} du$$

qui tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Enfin, on a

$$(3) + (4) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{c^2\varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} e^{-c(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \varphi(x) dx,$$

donc, comme précédemment,

$$|(3) + (4)| \leq e^{c|(R^2+1)^{1/2}} M \int_{\text{supp } \varphi} \frac{c^2 \varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} dx.$$

Enfin, comme pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $a^2 + b^2 \geq 2ab$, on a alors

$$\int_{\text{supp } \varphi} \frac{c^2 \varepsilon^2}{(\|x\|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} dx \leq \int_{\text{supp } \varphi} \frac{c^2 \varepsilon^2}{2^{3/2} \|x\|^{3/2} \varepsilon^{3/2}} dx$$

qui tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exercice 3. Tout d'abord, on remarque qu'une solution élémentaire de la dérivation seconde est $E(x) = \frac{1}{2}|x|$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle E'', \varphi \rangle &= \langle E, \varphi'' \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi''(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 -x \varphi''(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x \varphi''(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx \right) \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

On a alors $E(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|$. On introduit alors la fonction correctrice $\phi^x(y)$ qui est la solution du problème

$$\begin{cases} \phi^{x''} &= 0 & \text{dans }]0, 1[\\ \phi^x &= E(x, \cdot) & \text{en } 0 \text{ et } 1 \end{cases}$$

ϕ^x est donc une fonction affine de y sur $]0, 1[$ valant $\frac{1}{2}|x|$ en 0 et $\frac{1}{2}|x - 1|$ en 1 donc $\phi^x(y) = \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}(|1 - x| - |x|)y$. On a donc

$$G(x, y) = E(x, y) - \phi^x = \frac{1}{2}|x - y| - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2x)y.$$

Donc, si $x \leq y$, alors

$$G(x, y) = \frac{1}{2}(y - x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(1 - 2x)y = -x + xy = x(y - 1).$$

Si $x \geq y$, alors

$$G(x, y) = \frac{1}{2}(x - y) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(1 - 2x)y = -y + xy = y(x - 1).$$

Problème.

1. Comme la fonction $u(\cdot, \cdot) = u(x + \cdot, t + \cdot)$ est aussi solution de l'équation de la chaleur, on peut ainsi se ramener à $x = 0$ et $t = 0$. Le changement de variable $(y, s) \mapsto (ry, r^2s)$ montre que

$$\phi(r) = \iint_{E(1)} u(ry, r^2s) \frac{\|y\|^2}{s^2} dy ds.$$

2. Une dérivation par rapport à r sous le signe somme et le changement de variables inverse du précédent nous donne

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \iint_{E(1)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i}(ry, r^2s) y_i \frac{\|y\|^2}{s^2} + 2r \frac{\partial u}{\partial s}(ry, r^2s) \frac{\|y\|^2}{s} \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i}(y, s) y_i \frac{\|y\|^2}{s^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial s}(y, s) \frac{\|y\|^2}{s} \right) dy ds \end{aligned}$$

3. L'identité $\psi = 0$ sur $\partial E(r)$ est aisée à vérifier ainsi que l'identité

$$B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy ds.$$

On a

$$B = \frac{1}{r^{n+1}} \int_{s=-\infty}^0 \left(\int_{(y,s) \in E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy \right) ds.$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout $s \in]-\infty, 0[$,

$$\int_{(y,s) \in E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy = - \int_{(y,s) \in E(r)} \left(4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{s y_i} y_i \psi \right) dy,$$

ou encore que

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \int_{(y,s) \in E(r)} 4u_s y_i \psi_{y_i} dy = - \int_{(y,s) \in E(r)} (4u_s \psi + 4u_{s y_i} y_i \psi) dy$$

pour conclure. Il suffit pour cela d'intégrer par parties par rapport à y_i en remarquant que ψ est nulle sur ∂E_r .

4. La première identité se prouve de manière analogue en intégrant le terme

$$4 \sum_{i=1}^n u_{s y_i} y_i \psi$$

par parties par rapport à s . La seconde identité découle seulement de l'expression de ψ et de A .

5. Si u est une solution de l'équation de la chaleur, alors $u_s = \Delta_y u$. On a

$$\phi'(r) = A + B = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\Delta_y u \psi - 2\frac{n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \right) dy ds.$$

En intégrant par parties le premier terme par rapport aux y_i , on a

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^n \iint_{E(r)} \left(4n u_{y_i} \psi_{y_i} - 2\frac{n}{s} u_{y_i} y_i \right) dy ds$$

qui vaut 0 si on remplace ψ par son expression.

6. ϕ est donc constante, et donc, grâce au théorème de la convergence dominée, on a

$$\phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(0,0) \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} \frac{\|y\|^2}{s^2} dy ds.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} \frac{\|y\|^2}{s^2} dy ds &= \iint_{E(1)} \frac{\|y\|^2}{s^2} dy ds = \\ &= \int_{s=-\infty}^0 \int_{\phi(y,-s) \geq 1} \frac{\|y\|^2}{s^2} dy ds = \int_{s=0}^{+\infty} \int_{\phi(y,s) \geq 1} \frac{\|y\|^2}{s^2} dy ds \end{aligned}$$

Or $\phi(y,s) \geq 1$ équivaut à $\|y\|^2 \leq -2ns \log(4\pi s)$, ce qui implique en particulier que nécessairement, $s \leq \frac{1}{4\pi}$. La dernière intégrale vaut donc

$$\int_{s=0}^{\frac{1}{4\pi}} \int_{\|y\|^2 \leq -2ns \log(4\pi s)} \frac{\|y\|^2}{s^2} dy ds.$$

On passe en coordonnées sphériques dans l'intégrale portant sur y ; on obtient

$$\int_{s=0}^{\frac{1}{4\pi}} \frac{\omega_n}{(n+2)s^2} (-2ns \log(4\pi s))^{n/2+1} ds.$$

Posons $u = -\log(4\pi s)$ dans cette intégrale, on obtient que celle-ci vaut

$$\frac{\omega_n}{(n+2)\pi^{n/2}} n^{n/2+1} 2^{-n/2+1} \int_{u=0}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}u} u^{n/2+1} du$$

soit encore, en posant $v = nu/2$,

$$\frac{8\omega_n}{n(n+2)\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right).$$

En utilisant le fait que $\Gamma(n/2 + 2) = \left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{n}{2} \Gamma(n/2)$ et $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, on obtient que l'intégrale cherchée vaut 4.