Corrigé du devoir n^{0}2

Exercice 1.

1. Il faut supposer I borné. Si $u \in C^1(\bar{I})$ alors u est continue sur $\bar{I}$ donc borné et donc $u \in L^p(I)$. La dérivée faible de u coïncide avec u' qui est elle aussi bornée donc $u' \in L^p(I)$ et donc $u \in W^{1,p}(I)$.
2. u est bornée sur I donc $u \in L^p(I)$. Montrons que $u' = H$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. On a

$$\int_I u\varphi' = \int_0^1 x\varphi' = \varphi(1) - \int_0^1 \varphi = -\int_0^1 \varphi = -\int H\varphi$$

donc $u' = H \in L^p$ ce qui implique que $u \in W^{1,p}(I)$.
Si u est continue et C^1 par morceaux, alors u est dans L^p car bornée et la dérivée de u au sens des distributions vaut la dérivée de u au sens ordinaire, qui est elle aussi bornée donc dans L^p. Ceci montre que $u \in W^{1,p}(I)$.
3. H est dans L^p car bornée. Par contre, $H' = \delta_0$ ne peut être représentée par un élément de L^p.

Exercice 2. Si $u \in H^p(I)$, alors d'après le théorème 2.2.11, $u \in L^\infty(I)$ et donc $u \in L^q(I)$ pour tout $q \geq 1$. En particulier, $\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_\infty |I|^{1/q} \leq C|I|^{1/q}\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ où C est la constante du théorème 2.2.11. On a alors $|||u||| \leq (1+C|I|^{1/q})\|u\|_{W^{1,p}(I)}$. Pour l'inégalité inverse, on remarque que $W^{1,p}(I)$ muni de la norme $|||\cdot|||$ est complet (la preuve est identique à la preuve de $W^{1,p}(I)$ complet). D'après le théorème de Banach (application ouverte), on a une inégalité analogue dans l'autre sens.

Exercice 3. Il suffit de montrer que si $u \in W_0^{m,p}(I)$, alors $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$ sont dans $W_0^{1,p}(I)$. Soit $k \in \{0, \ldots, m-1\}$. Il existe une suite (u_n) de fonctions de classe C^m à support compact dans I telle que (u_n) tende vers u dans $W^{m,p}(I)$, ce qui implique que $(u_n^{(k)})$ tend vers $u^{(k)}$ dans $W^{1,p}(I)$ et donc que $u^{(k)} \in W_0^{1,p}(I)$.

Exercice 4.

1. D'après le corollaire 2.2.13, si u est solution classique de ce problème et $v \in H_0^1(I)$, on a

$$\int_I -(pu')'v = \int_I pu'v'$$

d'où le résultat.

2. La bilinéarité est évidente. La continuité découle du fait que

$$|a(u,v)| \leq (\|p\|_\infty + \|q\|_\infty)|I|\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

Enfin, la coercivité découle du fait que, $p(x)$ étant strictement positive sur le compact $\bar{I}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $p(x) \geq \varepsilon > 0$, et donc

$$|a(u,u)| \geq \int_I pu'^2 \geq \varepsilon \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{\varepsilon}{C^2}\|u\|_{H^1}^2$$

où C est la constante du théorème 2.3.3.

3. Une application directe du théorème de Lax-Milgram nous donne l'existence de u solution faible dans $H_0^1(I)$.

4. u et f sont dans H^1. Donc $f - qu = -(pu')' \in H^1$. $(-pu')'$ est donc continue sur $\bar{I}$, donc pu' est de classe C^1 dans $\bar{I}$. On a donc $u' = (pu')/p$ qui est de classe C^1 sur $\bar{I}$, donc u est de classe C^2 sur $\bar{I}$.

Exercice 5. Prouvons tout d'abord que $u \in L^N(\mathbb{B}_N)$. Notons ω_N la surface de la sphère unité. On a

$$\int_{\mathbb{B}_N} \left|\log\log\left(1 + \frac{1}{\|x\|}\right)\right|^N dx = \omega_N \int_0^1 r^{N-1}\left|\log\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right|^N dr$$

Pour x assez grand, on a $\log x \leq x$, donc, pour r assez petit,

$$\left|\log\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right| \leq \log\left(1+\frac{1}{r}\right) \leq \log(\frac{1}{r}) = -\log r.$$

En particulier,

$$r \mapsto r^{N-1}\left|\log\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\right|^N$$

tend vers 0 quand $r \to 0$ donc est continue sur $[0,1]$. Ceci prouve bien que $u \in L^N(\mathbb{B}_N)$.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{(\|x\|^3 + \|x\|^2)\log\left(1 + \frac{1}{\|x\|}\right)}$$

donc

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leq \frac{1}{(\|x\|^2 + \|x\|)\log\left(1+\frac{1}{\|x\|}\right)} \leq \frac{1}{\|x\|\log\left(1+\frac{1}{\|x\|}\right)}$$

et

$$\int_{\mathbb{B}_N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^N dx \le \omega_N \int_0^1 \frac{r^{N-1}dr}{r^N \left[\log\left(1+\dfrac{1}{r}\right)\right]^N} \le \omega_N \int_0^1 \frac{dr}{r\left[\log\left(1+\dfrac{1}{r}\right)\right]^N}.$$

Posant $u = 1 + \frac{1}{r}$ dans la dernière intégrale, on a

$$\int_{\mathbb{B}_N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^N dx \le \omega_N \int_2^\infty \frac{du}{(u-1)[\log u]^N}.$$

Or, au voisinage de l'infini,

$$\frac{1}{(u-1)[\log u]^N} \sim \frac{1}{u[\log u]^N}$$

et

$$\int_2^\infty \frac{du}{u[\log u]^N} = \frac{1}{(N-1)[\log 2]^{N-1}} < +\infty,$$

donc $u \in W^{1,N}(\mathbb{B}_N)$.

Exercice 6. Fixons $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans Ω et considérons $\Omega_{x_2,\ldots,x_n}$ qui est l'ensemble des x_1 de $\mathbb{R}$ tels que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$. C'est un ouvert, qui est réunion d'intervalles ouverts disjoints $(I_j)_{j\in J}$ (il suffit de prendre les composantes connexes). Comme supp u est compact, on en déduit que supp u est recouvert par un nombre fini d'intervalles I_j. Notons les $]a_1, b_1[$, ..., $]a_N, b_N[$. On a

$$\int_{\Omega_{x_2,\ldots,x_n}} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^N \left\{ \left[u\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]_{a_i}^{b_i} - \int_{a_i}^{b_i} u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right\}$$
$$= -\int_{\Omega_{x_2,\ldots,x_n}} u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

En intégrant par rapport aux autres coordonnées $(x_2, \ldots, x_n)$ cette identité, en utilisant le théorème de Fubini qui s'applique car les fonctions intégrées sont continues à support compact, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\int_\Omega u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

En faisant cela pour les autres indices puis en ajoutant toutes les égalités obtenues, on obtient

$$\int_\Omega ||\nabla u||^2 = -\int_\Omega u\Delta u$$

et donc

$$\int_\Omega ||\nabla u||^2 \leq \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega (\Delta u)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega ||D^2 u||^2\right)^{1/2}.$$

Si maintenant $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors pour montrer qu'on a la même inégalité, en reprenant la preuve précédente, il suffit de montrer que l'on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\int_\Omega u\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

Pour cela, on utilise le fait qu'il existe une suite de fonctions (u_n) dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que (u_n) tend vers u et (u_n') tend vers u' dans $L^2(\Omega)$. La même preuve que précédemment nous montre que, pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial u_m}{\partial x_1} = -\int_\Omega u_n\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2}.$$

Fixons n et faisons tendre m vers $+\infty$. La convergence dans $L^2(\Omega)$ de u_m vers u implique la convergence au sens des distributions de u_m vers u, et donc

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\int_\Omega u_n\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

Enfin, on a

$$\left|\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leq \int_\Omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leq$$
$$\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même pour l'autre terme car $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ est dans $L^2(\Omega)$.